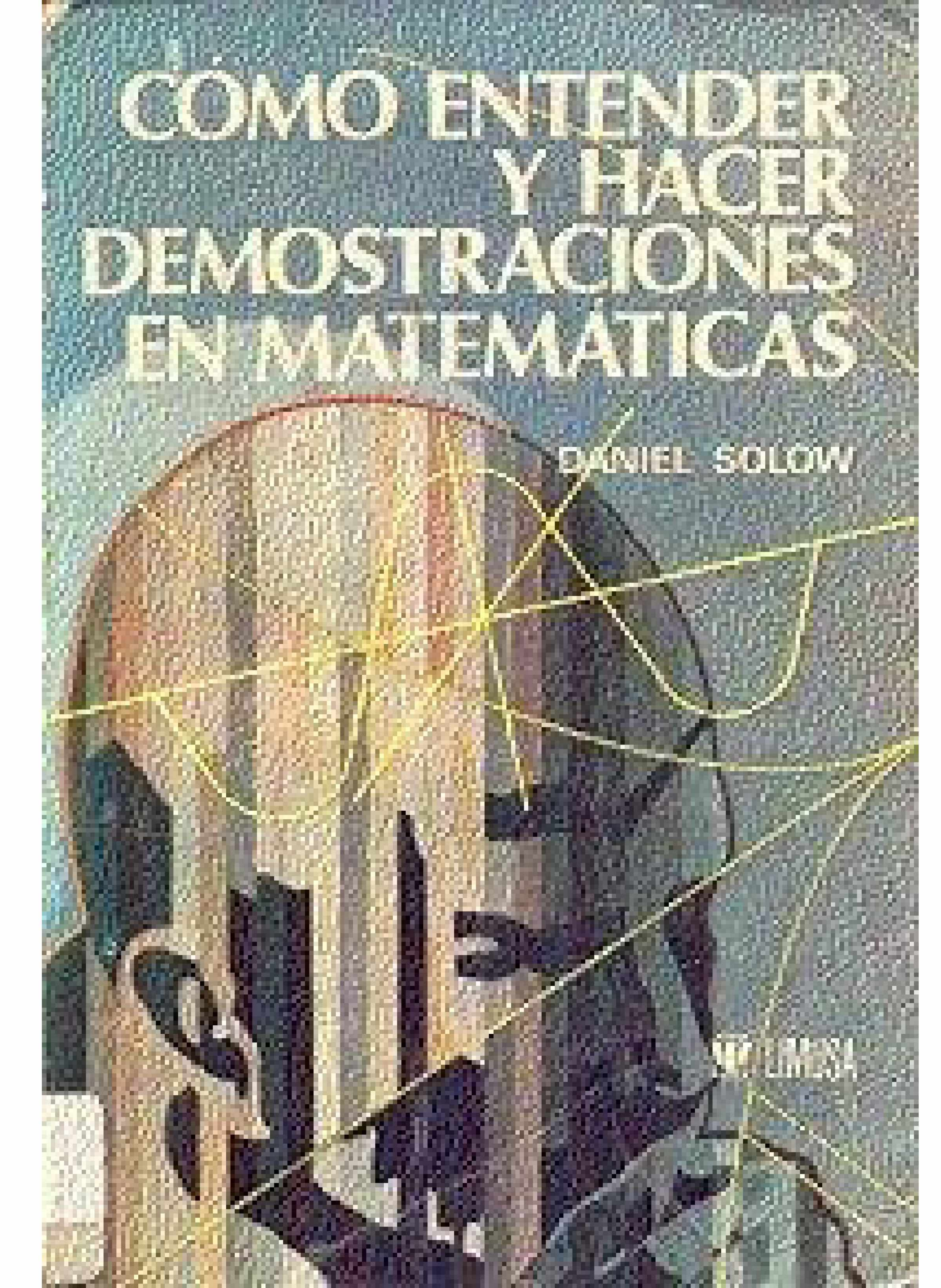

CÓMO ENTENDER
Y HACER
DEMOSTRACIONES
EN MATEMÁTICAS
DANIEL SOLOW

CÓMO ENTENDER Y HACER DEMOSTRACIONES EN MATEMÁTICAS

CÓMO ENTENDER Y HACER DEMOSTRACIONES EN MATEMÁTICAS

DANIEL SOLOW

Case Western Reserve University



MÉXICO
España • Venezuela • Argentina
Colombia • Puerto Rico

Versión autorizada en español
de la obra publicada en Inglés por
John Wiley & Sons, Inc., con el título
HOW TO READ AND DO PROOFS
© John Wiley & Sons, Inc.
ISBN 0-471-86645-8

Versión española supervisada por el profesor

DANIEL SOLOW

La presentación y disposición en conjunto de
CÓMO ENTENDER Y HACER DEMOSTRACIONES EN MATEMÁTICAS
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra puede ser reproducida o transmitida, mediante ningún sistema o método, electrónico o mecánico (INCLUYENDO EL FOTOCOPIADO, la grabación o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento de información), sin consentimiento por escrito del editor.

Derechos reservados:

© 1993, EDITORIAL LIMUSA, S.A. de C.V.
GRUPO NORIEGA EDITORES
Balderas 95, C.P. 06040, México, D.F.
Teléfono 521-21-05
Fax 512-29-03

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria
Editorial Mexicana. Registro número 121

Primera edición: 1987
Primera reimpresión: 1992
Segunda reimpresión: 1992
Tercera reimpresión: 1993
Impreso en México
(12316)

ISBN 968-18-2115-7

A mi padre Anatole A. Solow (q. p. d.)
y a mi madre Ruth Solow.

Prólogo

En un artículo denominado "Enseñando matemáticas utilizando técnicas para hacer demostraciones", el autor ha escrito: "La incapacidad para comunicar demostraciones de una manera comprensible ha sido perjudicial para estudiantes y profesores en todas las ramas de las matemáticas". Todos aquellos que han tenido la experiencia de enseñar matemáticas y la mayoría de aquellos que han tratado de aprenderlas, deben coincidir seguramente en que entender una demostración matemática es una traba para la mayoría de los estudiantes. Muchos de ellos tratan de salvar este obstáculo evadiéndolo, confiando en la indulgencia del profesor para que no incluya demostraciones en los exámenes. Esta confabulación entre estudiante y profesor evita algunas de las consecuencias desagradables, tanto para el alumno como para el profesor, producidas por la falta de dominio del tema por parte del estudiante, pero esto no modifica el hecho de que un elemento clave de las matemáticas, probablemente su característica más notable, no ha entrado en el repertorio del estudiante.

El doctor Solow cree que es posible enseñar al estudiante a entender la naturaleza de las demostraciones sistematizándolas. La idea es descrita convincentemente en este libro, con lujo de detalles y de ejemplos, y no dudo que sus ideas merezcan atención, análisis y, sobre todo, experimentación. Una de sus metas principales es enseñar al estudiante a leer demostraciones como las que se encuentran en los libros de texto. Seguramente, estas demostraciones, no se presentan en forma sistemática. Por lo tanto, en esta obra se presta mucha atención (particularmente en los dos apéndices) a enseñar al lector cómo

reconocer los elementos típicos de un argumento matemático en una presentación informal de una demostración.

Existe aquí una analogía válida con el papel de los algoritmos tradicionales de la aritmética elemental. Es importante conocerlos y entender cómo trabajan, y en qué problemas, en principio, pueden aplicarse. Pero una vez que se ha aprendido todo esto, uno no aplica mecánicamente esos algoritmos en situaciones de la vida real (¡ aun a falta de una calculadora!). El autor opina que sucede lo mismo con las demostraciones. Entienda y analice su estructura, con lo cual podrá leer y entender las versiones más informales que encuentre en los libros de texto y, finalmente, usted será capaz de crear sus propias demostraciones. El doctor Solow no afirma que los matemáticos desarrollan sus propias demostraciones aplicando concienzuda y deliberadamente el "método progresivo-regresivo"; sugiere que todos tendríamos una mejor oportunidad de enseñar a comprender las demostraciones sistematizándolas en lugar de presentar los procedimientos tradicionales con la esperanza de que los estudiantes puedan aprender éste difícil arte por ósmosis.

Uno debe estar de acuerdo con el doctor Solow de que, en este país (EUA), los estudiantes comienzan a enfrentarse con las ideas de las demostraciones matemáticas demasiado tarde en sus estudios. La etapa apropiada para iniciarse en estas ideas es, en opinión de muchos, no más tarde del octavo grado. Sin embargo, sería un error si los profesores universitarios justificaran sus propias fallas mediante una reconfortante referencia a los defectos en la educación preuniversitaria del estudiante.

En la actualidad, todos sabemos que las matemáticas constituyen un tema de fundamental importancia debido a su papel ubicuo en la vida contemporánea. Para que se utilicen eficazmente las matemáticas, sus métodos deben entenderse adecuadamente, de otra forma estaremos en el papel de robots (ineficientes) cuando tratemos de usar las matemáticas y hagamos un esfuerzo indebido con nuestras memorias que son por naturaleza imperfectas. El doctor Solow le ha dado mucha importancia a la cuestión de cómo puede lograrse la comprensión de una demostración matemática. Hoy en día, muchos estudiantes no adquieren esta comprensión, y el plan del doctor Solow para remediar esta situación insatisfactoria merece con justicia que se ponga a prueba.

Louis D. Beaumont Profesor Universitario PETER HILTON
Case Western Reserve University
Cleveland, Ohio

Al estudiante

Después de terminar mis estudios de Licenciatura, comencé a preguntarme por qué había sido tan difícil aprender matemáticas puras. A medida que avanzaba en mis estudios de posgrado me dí cuenta que las matemáticas poseen muchos de los aspectos de un juego: un juego en el cual las reglas habían estado parcialmente escondidas. ¡Imagínese tratando de jugar ajedrez antes de saber cómo se mueven todas las piezas! No es sorprendente que tantos estudiantes hayan tenido problemas con las matemáticas abstractas.

Este libro describe algunas de las reglas del juego denominado matemáticas puras. Por experiencia propia, prácticamente cualquier persona motivada y que cuente con los conocimientos de matemáticas del Bachillerato puede aprender estas reglas. Al aprenderlas, usted reducirá en gran parte el tiempo (y frustración) que se invierte en el aprendizaje de las matemáticas abstractas. Espero que este texto sirva para dicho objetivo.

Para jugar al ajedrez, usted debe aprender primero cómo se mueve cada una de las piezas. Solamente después de que estas reglas han sido asimiladas por su subconciente usted podrá concentrar toda su atención en aspectos creativos como las estrategias, tácticas, etc. De igual forma sucede en matemáticas. Al principio se necesita trabajar mucho para aprender las reglas fundamentales presentadas en este libro. De hecho, su objetivo debe ser asimilar este material hasta que se convierta en algo muy conocido para usted. Entonces, encontrará que su mente puede enfocarse hacia los aspectos creativos de las matemáticas. Estas

reglas no son substitutos para la creatividad, y este manual no tiene como finalidad enseñar cómo ser creativo. Sin embargo, creo que puede proporcionarle las herramientas necesarias para expresar su propia creatividad. De igual importancia es el hecho de que estas herramientas le permitirán entender y apreciar la creatividad de otros autores.

Usted está a punto de aprender un aspecto clave del proceso de razonamiento matemático. A medida que estudie el material y resuelva los problemas, esté consciente de su propio proceso de razonamiento. Haga preguntas y busque respuestas. Recuerde, la única pregunta no inteligente es aquella que no se formula.

Cleveland, Ohio
Junio de 1981

DANIEL SOLOW

Al profesor

La falta de un método adecuado para comunicar demostraciones de una manera entendible ha sido perjudicial para estudiantes y profesores en todas las ramas de las matemáticas. Los resultados han sido estudiantes frustrados, profesores frustrados y, frecuentemente, cursos de bajo nivel que sólo permiten que los estudiantes vean parte del programa, o un examen sencillo que proteje a los estudiantes de las consecuencias de esta deficiencia.

Uno podría concluir que la mayoría de los estudiantes no pueden entender simplemente matemáticas abstractas, pero mi experiencia indica lo contrario. Lo que parece hacer falta es una metodología apropiada para explicar las matemáticas teóricas. En este manual he desarrollado un método para comunicar demostraciones: un lenguaje común que puede ser enseñado por los profesores y entendido por los estudiantes. En esencia, este libro clasifica por categorías, identifica y explica (al nivel de los estudintes) las diversas técnicas que se usan en forma repetitiva para prácticamente todas las demostraciones.

Una vez que el estudiante entienda estas técnicas, entonces es posible explicar cualquier demostración mediante la aplicación sucesiva de las mismas. De hecho, es aconsejable hacerlo de esta forma debido a que este proceso fortalece lo que el estudiante ha aprendido en el manual.

Explicar una demostración en términos de las técnicas que la componen no es difícil, tal como se ilustra en los ejemplos de este folle-

to. Antes de cada demostración "condensada" existe una explicación detallada de la misma en la cual se presenta la metodología, el proceso de razonamiento y las técnicas que se utilizan. Enseñar a hacer demostraciones en esta forma no requiere más que seguir cada paso de la demostración indicando qué técnica va a utilizarse y por qué.

En el análisis de una demostración en clase, propongo que los estudiantes participen activamente en la elección de las técnicas y en el diseño de la demostración. Me ha sorprendido gratamente la calidad de sus comentarios así como la de sus preguntas. Mi experiencia me ha enseñado que una vez que los estudiantes conocen las técnicas para hacer demostraciones, sus mentes tienden a cuestionar los aspectos más importantes de las matemáticas como por qué una demostración se realiza de una forma particular y por qué esa parte de las matemáticas es importante. Este libro no pretende enseñar cómo ser creativo, pero creo que describe muchas de las aptitudes básicas cuya adquisición hará posible que la mente del estudiante se concentre en los aspectos creativos. He encontrado también que al usar este enfoque, es posible presentar el material del curso a un nivel mucho más sofisticado sin confundir a los estudiantes.

De cualquier modo, el mensaje es claro. Considero que son muchos los beneficios que se ganan al enseñar el proceso de razonamiento matemático además del material del curso. Este manual está diseñado para dar un gran paso en la dirección correcta, haciendo que las matemáticas teóricas sean comprensibles y amenas para los estudiantes, y para que usted tenga un método para comunicarse con ellos.

Cleveland, Ohio
Junio de 1981

DANIEL SOLOW

Agradecimientos

Por ayudar a que este trabajo fuera divulgado en la comunidad matemática, mi agradecimiento más profundo es para Peter Hilton destacado matemático y educador. También, quisiera agradecer a Paul Halmos, cuyo reconocimiento y apoyo oportuno facilitaron enormemente la divulgación de la existencia de este manual y método de enseñanza. Agradezco también las pláticas sostenidas con Gail Young y George Polya.

Con respecto a la preparación del folleto, ninguna persona tuvo más comentarios constructivos que Tom Butts. Él no solamente contribuyó con el contenido matemático, sino que corrigió también muchos de los errores gramaticales y de estilo en la versión preliminar por lo que considero que también debo agradecer a la Sra. Butts, madre de Tom, el ser profesora de inglés. Me gustaría también agradecerle a Charles Wells la lectura y comentario del primer borrador y el animarme a continuar adelante con el proyecto. Muchas otras personas hicieron sugerencias importantes, incluyendo a Alan Schoenfeld, Samuel Goldberg y Ellen Stenson.

El aspecto más estimulante de todo este proyecto ha sido la traducción simultánea de este folleto al chino, japonés, español y francés mediante el esfuerzo voluntario de personas excepcionales que están profundamente preocupadas por la calidad de la educación de las matemáticas. La dedicación, profesionalismo y cooperativismo internacional del que yo he sido testigo es verdaderamente notable. La versión en español fue preparada por Luis A. Hernández (México),

José González (México), Ramón Nadira (Venezuela), Gilberto Mena (México), Alberto Urdaneta (Venezuela), José Rodríguez (México) e Yves Vidaurre (Nicaragua). También Emilio Flores (México) aportó su valiosa ayuda. Dedico la traducción al español de este manual a estas personas. Estoy seguro que ellos comparten mi esperanza de que este trabajo sea una valiosa contribución para enseñarles matemáticas a sus compatriotas.

Por último, pero no por eso menos importante, estoy muy agradecido con mi esposa Audrey por su ayuda en la revisión y por su paciencia durante otro de mis proyectos.

D.S

Contenido

Tablas

Definiciones

Capítulo 1

La verdad en matemáticas

El objetivo de los matemáticos es descubrir y comunicar ciertas verdades. Las matemáticas son el lenguaje de los matemáticos y una demostración, es un método para comunicar una verdad matemática a otra persona que también "habla" el mismo idioma. Una propiedad del lenguaje de las matemáticas es su precisión. Una demostración propiamente presentada no deberá contener ambigüedades y no habrá duda de que es correcta. Desafortunadamente, muchas demostraciones que aparecen en libros de texto y artículos de revistas no tienen la claridad necesaria; dicho en otras palabras, las demostraciones están presentadas adecuadamente para quienes ya conocen el lenguaje de las matemáticas. Por lo tanto, para entender, hacer una demostración o ambas cosas, usted debe aprender un idioma nuevo, un método nuevo de razonamiento. Esta obra explica gran parte de la "gramática" básica que usted necesitará, pero tal y como sucede en el aprendizaje de un nuevo idioma, será necesaria mucha práctica de su parte para llegar a tener fluidez.

La idea de este manual es clasificar y explicar las diversas técnicas que se utilizan en las demostraciones. El primer objetivo es enseñarle a leer y entender una demostración escrita mediante la identificación de las técnicas que se han utilizado. Al aprender esto, usted estará capacitado para estudiar casi cualquier tema en matemáticas sin la ayuda de un profesor, lo que es una meta muy conveniente.

El segundo objetivo de este manual es enseñarle a desarrollar y comunicar sus propias demostraciones de verdades matemáticas conocidas. Para lograrlo se necesita que aplique una cierta cantidad de ingenio, creatividad, intuición y experiencia. Así como hay maneras diferentes

para expresar la misma idea en cualquier idioma, así también hay diferentes demostraciones para el mismo hecho matemático. Las técnicas para hacer demostraciones que se presentan aquí están diseñadas para iniciarlo y para guiarlo a través de una demostración. Consecuentemente, este folleto no sólo describe cómo trabajan las técnicas para hacer demostraciones, sino que también muestra cuándo deben utilizarse y por qué. Con frecuencia, se da el caso de que una técnica correcta puede seleccionarse basándose en la forma del problema que se está considerando. Por lo tanto, cuando usted trate de hacer su propia demostración, es importante seleccionar conscientemente la técnica de demostración, en vez de desperdiciar horas tratando de ver qué hacer. Cuanto más consciente esté usted del proceso de razonamiento mejor.

El objetivo final, sin embargo, es que usted utilice sus nuevas habilidades y lenguaje adquiridos para descubrir y comunicar verdades matemáticas anteriormente desconocidas. Esta meta es admirable aunque extremadamente difícil de lograr. El primer paso en este sentido es alcanzar un nivel en el que uno sea capaz de leer y desarrollar las demostraciones propias de las verdades ya conocidas. Esto le dará a usted un entendimiento mucho más profundo y rico del universo matemático que lo rodea.

El material básico de las técnicas para hacer demostraciones se presenta en los once capítulos siguientes. El capítulo doce es un resumen completo y le siguen dos apéndices, en los cuales se ilustran las diversas técnicas con varios ejemplos.

La presente obra está diseñada para que estudie en ella cualquier persona con conocimientos de matemáticas a nivel preuniversitario. Estudiantes avanzados que anteriormente ya han visto demostraciones, pueden estudiar los dos primeros capítulos, pasar luego al capítulo del resumen y, posteriormente, estudiar en los dos apéndices para ver cómo se utilizan todas las técnicas. El resto de este capítulo explica el tipo de relaciones en las cuales pueden aplicarse las demostraciones.

Dados dos proposiciones, A y B, cada uno de los cuales puede ser verdadero o falso, un problema de interés fundamental en matemáticas es el de demostrar que si A es verdadero, entonces B es verdadero. Una demostración es un método formal para realizar esta tarea. Como usted pronto descubrirá, la forma particular de A y B puede indicar a menudo el camino a seguir. Algunos ejemplos de proposiciones.

1. Dos rectas diferentes en un plano son paralelas o se cortan sólo en un punto.

2. $1 = 0$.
3. $3x = 5$ y $y = 1$.
4. x no es > 0.
5. Existe un ángulo t tal que $\cos(t) = t$.

Observe que la proposición 1) es siempre verdadera, 2) es siempre falso, y que los postulados 3) y 4) pueden ser verdaderos o falsos, dependiendo del valor de una variable.

Tal vez no sea tan obvio que la proposición 5) es siempre verdadero. Por lo tanto, es necesario tener algún método para demostrar que tales proposiciones son verdaderas. En otras palabras, una demostración es un argumento convincente expresado en el idioma de las matemáticas. Como tal, una demostración deberá contener suficientes detalles matemáticos para poder convencer a la(s) persona(s) a quien(es) está dirigida. Por ejemplo, una demostración de la proposición 5) dirigida a un profesor de matemáticas podría ser solamente la figura 1. Por otro lado, una prueba dirigida a un estudiante de bachillerato requerirá una explicación detallada, tal vez la definición del coseno inclusive. La falta de esta explicación detallada es lo que hace que una demostración sea a menudo tan difícil de leer y entender. Uno de los objetivos de este texto es el de enseñar a descifrar dichas demostraciones "condensadas" que aparecen comúnmente en los libros de texto y en las publicaciones matemáticas.

Para poder hacer una demostración, usted debe saber exactamente lo que significa demostrar que "si A es verdadero entonces B es verdadero". La proposición A se llama a menudo *hipótesis* y el postu-

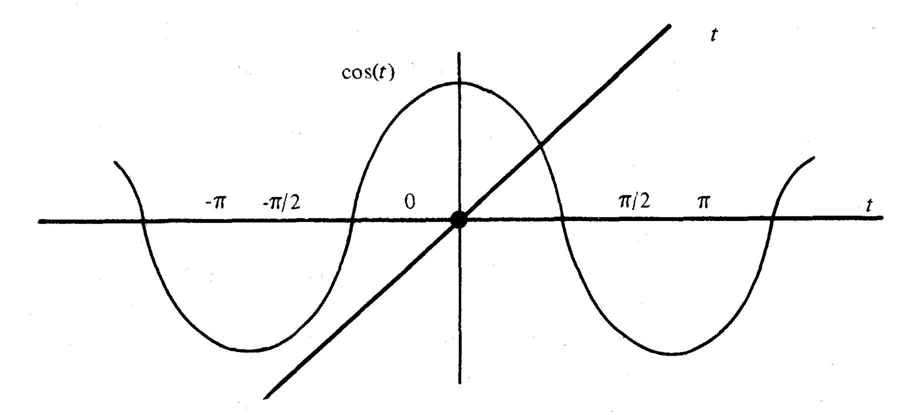


Figura 1. Una demostración de que existe un ángulo t tal que $\cos(t) = t$.

lado *B* *conclusión.* Para abreviar, la proposición "si *A* es verdadero entonces *B* es verdadero" se reduce a "si *A* entonces *B*", o simplemente "*A* implica *B*". Los matemáticos son a menudo muy perezosos cuando se trata de escribir. Por lo cual han desarrollado una "taquigrafía" simbólica. Por ejemplo, un matemático escribirá "$A \Rightarrow B$" en lugar de "*A* implica *B*". En su mayor parte, los libros no usan la notación simbólica, pero los profesores sí la usan a menudo y, finalmente también usted la puede encontrar de utilidad. Por lo tanto, este texto incluirá los símbolos apropiados, pero no los usará en las demostraciones. En el glosario se puede encontrar una lista completa de los símbolos, al final del presente libro.

Parece razonable que las condiciones bajo las cuales "*A* implica *B*" es verdadero dependerán de si *A* y *B* son verdaderos. Consecuentemente, hay cuatro posibles casos a considerar:

1. *A* es verdadero y *B* es verdadero.
2. *A* es verdadero y *B* es falso.
3. *A* es falso y *B* es verdadero.
4. *A* es falso y *B* es falso.

Suponga, por ejemplo, que un amigo le ha dicho lo siguiente: "Si llueve entonces María trae su paraguas". Aquí la proposición *A* es "llueve" y *B* es "María trae su paraguas". Para determinar cuándo es falso, la proposición "*A* implica *B*", pregúntese en cuál de los cuatro casos usted llamaría a su amigo mentiroso. En el primer caso (es decir, cuando llueve y María trae su paraguas) su amigo le ha dicho la verdad. En el segundo caso, llovió y María no traía su paraguas. Dado que su amigo dijo que ella traería su paraguas, puede concluirse que su amigo no ha dicho la verdad. Finalmente, en los casos 3) y 4) no llueve. Usted no le diría a su amigo que es un mentiroso ya que él tan sólo dijo que algo sucedería en caso que lloviera. Así, el postulado "*A* implica *B*" es verdadero en cada uno de los cuatro casos excepto en el segundo, como se resume en la tabla 1.1. .

La tabla 1.1 es un ejemplo de una *tabla de verdad.* Una tabla de verdad es un método para determinar cuándo una proposición complejo (en este caso "*A* implica *B*") es verdadero, debiendo examinarse todos los posibles valores de la verdad de las proposiciones individuales (en este caso *A* y *B*). Otros ejemplos de tablas de verdad aparecerán en el capítulo 3.

De acuerdo a la tabla 1.1, cuando se trata de demostrar que "*A* implica *B*" es verdadero, se puede suponer que la proposición a la iz-

Tabla 1. Tabla de verdad para "*A* implica *B*".

A	*B*	*A implica B*
Verdadero	Verdadero	Verdadero
Verdadero	Falso	Falso
Falso	Verdadero	Verdadero
Falso	Falso	Verdadero

quierda de la palabra "implica" (es decir, *A*) es verdadero. Su meta es concluir que el postulado de la derecha (es decir, *B*) es verdadero. Tenga en cuenta que una demostración de la proposición "*A* implica *B*" no es un intento de verificar si *A* y *B* son verdaderos, sino demostrar que *B* es una consecuencia lógica de haber supuesto que *A* es verdadero.

En general, la habilidad para demostrar que *B* es verdadero dependerá mucho del hecho de que usted ha supuesto que *A* es verdadero y, finalmente, tendrá que descubrir la relación entre *A* y *B*. Hacer esto requerirá una cierta cantidad de creatividad de su parte. Las técnicas que se presentarán para hacer demostraciones están diseñadas para iniciarlo y guiarlo a lo largo del camino.

En lo sucesivo, *A* y *B* serán proposiciones que pueden ser verdaderas o falsas. El problema de interés será demostrar que "*A* implica *B*".

EJERCICIOS

1.1 De los siguientes incisos, diga cuáles son proposiciones. (Recuerde que una proposición debe ser verdadera o falsa).

a) $ax^2 + bx + c = 0$.
b) $(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$.
c) el triángulo *XYZ* es similar al triángulo *RST*.
d) $3 + n + n^2$.
e) $\operatorname{sen}(\pi/2) < \operatorname{sen}(\pi/4)$.
f) para todo ángulo *t*, $\operatorname{sen}^2(t) + \cos^2(t) = 1$.

1.2 Para cada uno de los siguientes incisos, identifique la hipótesis y la conclusión.

a) Si el triángulo rectángulo XYZ con lados x y y e hipotenusa z tiene un área de $z^2/4$, entonces, el triángulo XYZ es isósceles.
b) n es un entero par = > n^2 es un entero par.
c) Si a, b, c, d, e y f son números reales con la propiedad $(ad - bc) \neq 0$, entonces las dos ecuaciones lineales $(ax + by) = e$ y $(cx + dy) = f$ tienen solución para x y y.
d) La suma de los primeros n enteros positivos es $n(n + 1)/2$.
e) r es un número real y se cumple que $r^2=2$ implica que r es irracional.
f) Si p y q son números reales positivos con $\sqrt{(pq)} \neq (p + q)/2$ entonces $p \neq q$.
g) Si x es un número real, el valor mínimo de $x(x - 1)$ es por lo menos $-1/4$.

1.3 Si usted está tratando de demostrar que "*A* implica *B*" es verdadero y sabe que *B* es falso, ¿quiere demostrar que la proposición *A* es verdadera o falso? Explique.

1.4 Usando la tabla 1.1, determine las condiciones bajo las cuales las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Dé sus razones.

a) Si $2 > 7$ entonces $1 > 3$.
b) Si $2 < 7$ entonces $1 < 3$.
c) Si $x = 3$ entonces $1 < 2$.
d) Si $x = 3$ entonces $1 > 2$.

1.5 Desarrolle la tabla de verdad para cada una de las siguientes proposiciones.

a) *A* implica (*B* implica *C*).
b) (*A* implica *B*) implica *C*.

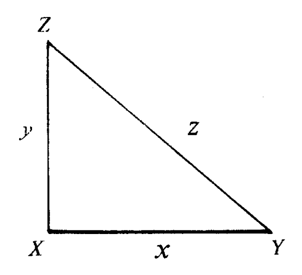
Capítulo 2

El método progresivo-regresivo

El propósito de este capítulo es describir una de las técnicas fundamentales para hacer demostraciones: *el método progresivo-regresivo.* Se le da especial énfasis al material de este capítulo debido a que se usará este método en todas las otras técnicas para hacer demostraciones.

Para el primer paso en cualquier demostración se necesita identificar las proposiciones A y B. En general, todo lo que sigue a la palabra "si" y antes de la palabra "entonces" constituye la proposición 26 B. Es decir, todo lo que usted supone que es verdadero (es decir, la hipótesis) es A; todo lo que está tratando de demostrar (es decir, la conclusión) es B. Considere el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1 Si el triángulo rectángulo XYZ, con lados x y y e hipotenusa z tiene un área de $z^2/4$, entonces, el triángulo es isósceles (figura 2).



El triángulo rectángulo XYZ

Explicación detallada de la demostración: en este ejemplo las proposiciones son:

a) El triángulo rectángulo XYZ con lados x y y, e hipotenusa z tiene un área de $z^2/4$.
b) El triángulo XYZ es isósceles.

Recuerde que al demostrar "A implica B" usted puede suponer que A es verdadero y, de alguna forma, debe usar esta información para lograr la conclusión de que B es verdadero. Al tratar de determinar cómo llegar a la conclusión de que B es verdadero, usted está realizando el proceso regresivo. Por otro lado, cuando haga uso específico de la información contenida en A, usted estará realizando el proceso progresivo. Ambos precesos se describirán detalladamente.

El proceso regresivo se inicia preguntando "¿cómo o cuándo puedo concluir que la proposición B es verdadera?" La manera en la cual usted formule esta pregunta es crítica puesto que debe ser capaz de contestarla. La pregunta debe formularse de un modo abstracto. Para el ejemplo 1, la pregunta abstracta correcta es "¿cómo puedo demostrar que *un* triángulo es isósceles?" A pesar de que es verdad que usted quiere demostrar que el triángulo XYZ en particular es isósceles, al formular la pregunta abstracta usted hace referencia a sus conocimientos generales de triángulos, eliminando así detalles irrelevantes (como el hecho de que el triángulo se llama XYZ en lugar de ABC), permitiéndole así que se concentre en los aspectos importantes del problema. La pregunta obtenida de la proposición B en tales problemas será llamada *pregunta de abstracción.* Una pregunta de abstracción formulada adecuadamente no deberá contener ni los símbolos, ni la notación del problema específico bajo consideración. La clave de muchas demostraciones es formular correctamente la pregunta de abstracción.

En cualquier caso, una vez que usted ha formulado la pregunta de abstracción, el siguiente paso en el proceso regresivo es contestarla. Regresando al ejemplo, ¿cómo puede usted demostrar que un triángulo es isósceles? Ciertamente, una manera de hacerlo es demostrando que dos de sus lados tienen la misma longitud. Refiriéndose a la figura 2, usted debe demostrar que $x = y$. Observe que la respuesta a la pregunta de abstracción es un proceso de dos fases. Primero usted da una respuesta, abstracta: para demostrar que un triángulo es isósceles, demuestre que dos de sus lados tienen la misma longitud. Poste-

riormente, aplique esta respuesta a la situación específica; en este caso, para demostrar que dos de sus lados tienen la misma longitud, usted tiene que demostrar que $x = y$, y no que $x = z$ o que $y = z$. El proceso para formular la pregunta de abstracción, contestarla abstractamente, y aplicarla a la situación específica se denominará *proceso de abstracción.*

El proceso de abstracción le ha proporcionado una nueva proposición, B_1, con la propiedad de que si usted pudiese demostrar que B_1 es verdadero, entonces B sería verdadero. En el ejemplo anterior, la nueva proposición es:

B_1: $x = y$

Si puede demostrar que $x = y$, entonces el triángulo XYZ es isósceles. Una vez que usted tiene el postulado B_1, todos sus esfuerzos deberán dirigirse ahora a llegar a la conclusión de que B_1 es verdadero y, como consecuencia, que B también es verdadero. ¿Cómo puede demostrar que B_1 es verdadero? Al final, usted tendrá que suponer que A es verdadero, y resolver el problema, lo cual podría hacerse ahora, pero por el momento, continuemos el proceso regresivo repitiendo el proceso de abstracción con la nueva proposición B_1. Esto servirá para ilustrar algunas de las dificultades que surgen en el proceso regresivo. ¿Puede usted formular la nueva pregunta de abstracción?

Puesto que x y y son los dos lados del triángulo, una pregunta de abstracción razonable sería "¿cómo puedo demostrar que los dos lados de un triángulo son iguales?" Una segunda pregunta de abstracción perfectamente razonable sería "¿cómo puedo demostrar que dos números reales son iguales?" después de todo, x y y son también números reales. Una de las dificultades que pueden surgir en el proceso de abstracción es la posibilidad de que haya más de una pregunta de abstracción. La selección de la pregunta correcta es más un arte que una ciencia. En circunstancias afortunadas habrá sólo una pregunta de abstracción. En otros casos, usted tendrá que proceder por ensayo y error. Aquí es donde la intuición, ingenio, creatividad, experiencia, diagramas y gráficas pueden jugar un papel importante. Un guía general es permitir que la información contenida en A (la cual usted está suponiendo que es verdadera) le ayude a seleccionar la pregunta, como se hará en este caso.

Independientemente de la pregunta que usted seleccione, el siguiente paso será contestarla, primero en lo abstracto y después en

la situación específica. ¿Puede usted hacer esto con las dos preguntas de abstracción anteriores? Para la primera podría demostrar que dos lados de un triángulo tienen la misma longitud demostrando que los ángulos opuestos a ellos son iguales. En el triángulo XYZ de la figura 2, esto significaría que tiene que demostrar que el ángulo X es igual al ángulo Y. El examen rápido del contenido de la proposición A no parece proporcionar ninguna información relacionada con los ángulso del triángulo XYZ. Por esta razón, se usará la otra pregunta de abstracción.

Ahora uno se encuentra con la pregunta "¿cómo puedo demostrar que dos números reales x y y son iguales?" Una respuesta a esta pregunta sería demostrar que la diferencia de los dos números es cero. Aplicar esta respuesta a la proposición específica B_1 significa que usted tendría que demostrar que $(x - y) = 0$. Desafortunadamente, existe otra respuesta perfectamente aceptable; demuestre que el primer número es menor o igual al segundo y que también el segundo número es menor o igual al primero. Aplicando esta respuesta a la proposición específica B_1, usted tendrá que demostrar que $x \leqslant y$ y que $y \leqslant x$. Así, podría surgir una segunda dificultad en el proceso regresivo. Aun si usted selecciona la pregunta de abstracción correcta, podría existir más de una respuesta a ella. Además, usted podría escoger una respuesta que no le permitiera completar la demostración. Por ejemplo, junto con la pregunta de abstracción "¿cómo puedo demostrar que un triángulo es isósceles?" está la respuesta "demuestre que el triángulo es equilátero." Por supuesto sería imposible demostrar que el triángulo XYZ del ejemplo 1 es equilátero ya que uno de sus ángulos tiene 90 grados.

Regresando a la pregunta de abstracción "¿cómo puedo demostrar que dos números reales (x y y) son iguales?", suponga que usted escoge la primera respuesta, es decir, que su diferencia es cero. Una vez más, el proceso de abstracción le ha proporcionado una nueva proposición, B_2, con la propiedad de que si usted pudiera demostrar que B_2 es verdadera, entonces, B_1 sería verdadera, y por lo tanto B lo sería también. Específicamente, la nueva proposición es:

$$B_2 : x - y = 0$$

Ahora todos sus esfuerzos deben dirigirse a la conclusión de que B_2 es verdadero. Usted debe hacer uso en alguna parte de la demostración de la información en A, pero por el momento, continuemos una vez más con el proceso de abstracción aplicando al nuevo postulado B_2.

Una pregunta de abstracción es "¿cómo puedo demostrar que la diferencia de dos números reales es igual a 0?" En este punto, podría parecer que no existe ninguna respuesta razonable a esta pregunta. Por lo tanto, otro problema puede surgir en el proceso de abstracción: ¡aparentemente, la pregunta de abstracción no tiene respuesta! Sin embargo, no todo está perdido. Recuerde que al demostrar que "A implica B", se le permite suponer que A es verdadera. En ninguna parte usted ha hecho uso de esta información. Es tiempo de hacerlo a través del proceso progresivo.

El proceso progresivo se inicia con la proposición A, que se supone es verdadera, y obtiene a partir de ella otra proposición, A_1 la cual ya sabe que es verdadera como resultado de que A es verdadera. Se debe enfatizar que las proposiciones derivadas de A no se deben al azar. Por el contrario, deben estar dirigidas hacia la obtención de la última proposición derivada en el proceso regresivo. Esta última proposición debe actuar como una guía en el proceso progresivo. Regresando al ejemplo 1, recuerde que la última proposición obtenida en el proceso regresivo fue "$x - y = 0$".

Para el ejemplo bajo consideración, la proposición A es: "El triángulo rectángulo XYZ con lados x y y, e hipotenusa z tiene un área de $z^2/4$". Un hecho que usted sabe (o debería saber) como resultado de que A es verdadera, es que $xy/2 = z^2/4$, ya que el área de un triángulo rectángulo es la mitad de la base por la altura, en este caso $xy/2$. Así, usted ha obtenido la nueva proposición:

$$A_1 : xy/2 = z^2/4$$

Otra proposición muy útil que surge como consecuencia de A y del teorema de Pitágoras es:

$$A_2 : (x^2 + y^2) = z^2$$

También, el proceso progresivo puede combinar y usar las nuevas proposiciones para producir otras verdaderas. Para el ejemplo 1, es posible combinar A_1 y A_2 substituyendo $(x^2 + y^2)$ en A_1 obteniendo la proposición:

$$A_3 : xy/2 = (x^2 + y^2)/4$$

Uno de los problemas con el proceso progresivo es que es posible generar proposiciones inútiles, por ejemplo "el ángulo X es menor

de 90 grados". Como no hay reglas específicas para saber cómo producir nuevas proposiciones, recuerde el hecho de que el proceso progresivo está dirigido hacia la obtención de la proposición B_2: $x - y = 0$, el cual fue la última proposición derivada en el proceso regresivo. Es por esta razón que z^2 fue eliminada de A_1 y A_2.

Continuando el proceso progresivo, usted debe intentar reescribir A_3 para hacer que éste se parezca a B_2. Por ejemplo, puede multiplicar ambos miembros de A_3 por 4 y substraer $2xy$ de ambos lados para obtener:

$$A_4: (x^2 - 2xy + y^2) = 0$$

Factorizando, se obtiene

$$A_5: (x - y)^2 = 0$$

Uno de los pasos más comunes del proceso progresivo es el de reescribir las proposiciones en diferentes formas, como fue hecho al obtener A_4 y A_5. Para el ejemplo 1, el paso final en el proceso progresivo (y en toda la demostración) es sacar la raíz cuadrada positiva de ambos lados de la igualdad en A_5, obteniendo así precisamente la proposición B_2: $x - y = 0$. La demostración queda completa, puesto que usted empezó con la suposición de que A es verdadero, y la usó para llegar a la conclusión de que B_2 y, por lo tanto B, es verdadero. Los pasos y razones están resumidos en la tabla 2.

Tabla 2 Demostración del ejemplo 1.

Proposición	*Razón*
A: El área de XYZ es $z^2/4$	Hipótesis
$A_1: xy/2 = z^2/4$	Área = 1/2 (base)(altura)
$A_2: x^2 + y^2 = z^2$	Teorema de Pitágoras
$A_3: xy/2 = (x^2 + y^2)/4$	Substituya A_2 en A_1
$A_4: x^2 - 2xy + y^2 = 0$	Álgebra
$A_5: (x - y)^2 = 0$	Factorizando A_4
$B_2: (x - y) = 0$	Raíz cuadrada de A_5
$B_1: x = y$	Sume y a ambos miembros de B_2
B: El triángulo XYZ es isósceles	Puesto que B_1 es verdadero

Es interesante observar que el proceso progresivo produjo finalmente la respuesta a la pregunta de abstracción asociada con B_2, es

decir, "¿cómo puedo demostrar que la diferencia de dos números reales es 0?" cuya respuesta es: demuestre que el cuadrado de la diferencia es cero (A_5 en la tabla 2).

Finalmente, usted debe darse cuenta que, en general, no sería práctico escribir todo el proceso de razonamiento de una demostración, ya que esto requeriría demasiado tiempo, esfuerzo y espacio. Por el contrario, se presenta usualmente una versión muy condensada, la cual hace poca o ninguna referencia al proceso regresivo. Para el problema anterior podría ser algo como esto:

Demostración del Ejemplo 1. De la hipótesis y la fórmula para el área de un triángulo rectángulo, el área de XYZ es igual a $xy/2 = z^2/4$. Por el teorema de Pitágoras, $(x^2 + y^2) = z^2$, y escribiendo $(x^2 + y^2)$ en lugar de z^2 y efectuando algunas operaciones algebraicas se obtiene $(x - y) = 0$. De aquí que $x = y$ y el triángulo XYZ es isósceles.|| (El "||" o algún símbolo equivalente es empleado para indicar el final de una demostración. Algunas veces se utiliza la abreviación *Q. E. O.* que representa las palabras latinas *quod erat demonstrandum* que significan "lo que se quería demostrar").

Algunas veces la demostración abreviada será parcialmente regresiva y parcialmente progresiva. Por ejemplo:

Demostración del ejemplo 1. La proposición se demuestra estableciendo que $x = y$, lo cual se hace demostrando a su vez que $(x - y)^2 = (x^2 - 2xy + y^2) = 0$. Pero el área del triángulo es $(1/2)xy = (1/4)z^2$, así que $2xy = z^2$. Por el teorema de Pitágoras, $z^2 = (x^2 + y^2)$ y, por lo tanto, $(x^2 + y^2) = 2xy$, o $(x^2 - 2xy + y^2) = 0$ como se requeriría.||

La demostración puede escribirse también partiendo del proceso regresivo; aunque esta versión es ligeramente poco común, vale la pena verla:

Demostración del ejemplo 1. Para alcanzar la conclusión, se demostrará que $x = y$ mediante la verificación de que $(x - y)^2 = (x^2 - 2xy + y^2) = 0$, o de forma equivalente que $(x^2 + y^2) = 2xy$. Esto, a su vez, puede ser establecido al demostrar que $2xy = z^2$, ya que el teorema de Pitágoras establece que $(x^2 + y^2) = z^2$. Para ver que $2xy = z^2$ o, de igual manera, que $(1/2)xy = (1/4)z^2$, note que $(1/2)xy$ es el área del triángulo que, por hipótesis, es igual a $(1/4)z^2$, completando así la demostración.||

Las demostraciones en los artículos publicados, particularmente los de investigación, son a menudo muy condensadas dando poco más que una sugerencia de cómo se hace la demostración. Por ejemplo:

Demostración del ejemplo 1. De la hipótesis y el teorema de Pitágoras se obtiene $(x^2 + y^2) = 2xy$, por lo tanto, $(x - y) = 0$. Así, el triángulo es isósceles como se requería.||

Note que las palabras "por lo tanto" ocultan la forma en que se obtuvo $(x - y) = 0$. ¿Fue esto una operación algebraica (como sabemos que fue) o fue algo más? Desafortunadamente, estas versiones condensadas se dan con tanta frecuencia en los libros de matemáticas, y es este hecho el que hace que las demostraciones sean tan difíciles de entender. Usted deberá esforzarse para adquirir la habilidad de leer y comprender una demostración condensada. Esto requerirá que usted determine qué técnica para hacer demostraciones se está utilizando (ya que el método progresivo-regresivo no es el único disponible), tendrá también que descubrir el proceso del razonamiento implícito en la demostración y, finalmente, deberá ser capaz de verificar todos los pasos implicados. Mientras más condensada sea la demostración, más difícil será este proceso. Algunos ejemplos de cómo leer demostraciones condensadas aparecen en los dos apéndices. Este texto le hará la vida substancialmente más fácil, ya que una explicación detallada de la demostración, la metodología y el razonamiento que estuvieron relacionados precederá a cada demostración condensada. Sin embargo, las explicaciones detalladas de las demostraciones serán más concisas que la mostrada en el ejemplo 1.

A continuación, se presenta un resumen del método progresivo-regresivo para demostrar que "A implica B". Empiece con la proposición B, que es la que quiere demostrar que es verdadera. A través del proceso de abstracción, preguntando y contestando la pregunta de abstracción, deduzca una nueva proposición B_1, con la característica de que si B_1 es verdadero, también B sea verdadero. Todos los esfuerzos están dirigidos ahora hacia el establecimiento de que B_1 es verdadero. Para este fin, aplique el proceso de abstracción a B_1, obteniendo una nueva proposición B_2 que tenga la característica de que si B_2 es verdadero, también lo sea B_1 (y por lo tanto, B). Recuerde que el proceso de abstracción lo ha generado la suposición de que A es verdadero. Continúe de esta manera hasta que obtenga la proposición A, (en cuyo caso, la demostración estará terminada), o bien, hasta que ya no pueda formular, contestar la pregunta de abstracción o

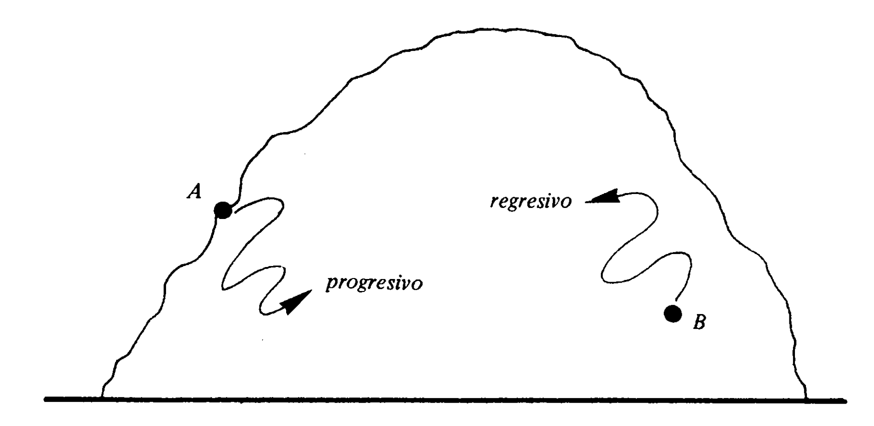


Figura 3. Buscando una aguja en un pajar.

ambas cosas, fructíferamente. En el último caso, es tiempo de empezar el proceso progresivo, en donde usted deduce de A una sucesión de proposiciones, las cuales son necesariamente verdaderas como resultado de que A se ha supuesto verdadero. Recuerde que la meta del proceso progresivo es obtener precisamente la última proposición que obtuvo en el proceso regresivo, con lo cual habrá completado con éxito la demostración.

Los procesos progresivos y regresivos pueden recordarse fácilmente imaginándose que la proposición B es como una aguja en un pajar. Cuando usted trabaja progresivamente a partir de la suposición de que A es verdadero, usted empieza en alguna parte en el exterior del pajar y trata de encontrar la aguja. En el proceso regresivo, usted empieza en la aguja y trata de encontrar el camino hacia afuera del pajar, es decir, hacia la proposición A (figura 3).

Otro modo de recordar el método progresivo-regresivo, es pensando en un laberinto en el cual A es el punto inicial y B es el punto final deseado (figura 4). Tal vez sea necesario alternar varias veces entre los procesos progresivos y regresivos antes de que tenga éxito, ya que probablemente habrá varios intentos fallidos y callejones sin salida.

Como una regla general, el método progresivo-regresivo es probablemente la primera técnica a tratar en un problema, a menos que usted tenga una razón para usar un enfoque diferente basado en la forma de B, tal como se describirá más adelante. De cualquier manera, usted obtendrá información de la relación entre A y B.

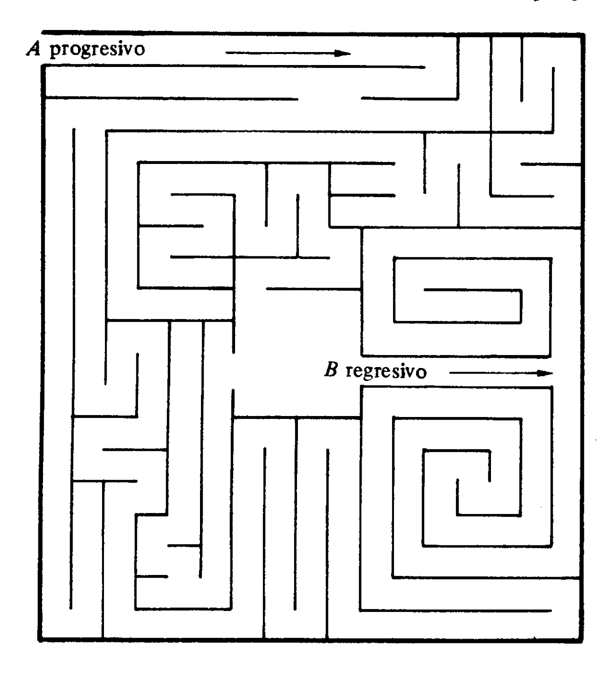


Figura 4. El laberinto.

EJERCICIOS

Nota: Todas las demostraciones deberán contener una explicación detallada de la misma así como una versión condensada.

2.1 Explique la diferencia entre los procesos progresivo y regresivo. Describa cómo trabaja cada uno de ellos y diga qué situaciones que compliquen una demostración puede ocurrir durante estos procesos. ¿Cómo están los dos procesos relacionados entre sí?

2.2 Considere el problema de demostrar que "Si x es un número real, entonces el valor máximo de $-x^2 + 2x + 1$ es $\geqslant 2$". ¿Cuál de las siguientes preguntas de abstracción es incorrecta y por qué?

a) ¿Cómo puedo demostrar que el máximo valor de una parábola es $\geqslant$ que un número?

b) ¿Cómo puedo demostrar que un número es $\leqslant$ que el máximo valor de un polinomio?

c) ¿Cómo puedo demostrar que el máximo valor de la función $-x^2 + 2x + 1$ es $\geqslant$ que un número?
d) ¿Cómo puedo demostrar que un número es $\leqslant$ que el máximo de una función cuadrática?

2.3 Considere el problema de demostrar que "Si

$R = \{$números reales $x: x^2 - x \leqslant 0\}$
$S = \{$números reales $x: -(x-1)(x-3) \geqslant 0\}$
$T = \{$números reales $x: x \geqslant 1\}$

entonces R intersección S es un subconjunto de T". ¿Cuál de las siguientes preguntas de abstracción es la más correcta y por qué? Explique lo que es incorrecto en las otras preguntas.

a) ¿Cómo puedo demostrar que un conjunto es un subconjunto de otro conjunto?
b) ¿Cómo puedo demostrar que el conjunto R intersección S es un subconjunto de T?
c) ¿Cómo puedo demostrar que todo punto en R intersección S es $\geqslant$ que 1?
d) ¿Cómo puedo demostrar que la intersección de dos conjuntos tienen un punto en común con otro conjunto?

2.4 Para cada uno de los siguientes problemas, indique tantas preguntas de abstracción como pueda (por lo menos dos). Asegúrese de que sus preguntas no contengan símbolos o la notación del problema específico.

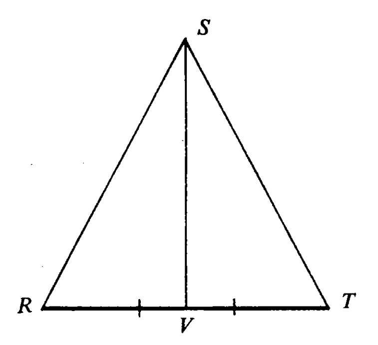
a) Si l_1 y l_2 son tangentes a una circunferencia C en los dos puntos extremos e_1 y e_2 de un diámetro d, respectivamente, entonces l_1 y l_2 son líneas paralelas.
b) Si f y g son funciones continuas entonces la función $f + g$ es continua. (Nota: La continuidad es una propiedad de una función).
c) Si n es un entero par, entonces n^2 es un entero par.
d) Si n es un entero para el cual $-3n^2 + 2n + 8 = 0$, entonces $2n^2 - 3n = -2$.

2.5 Para cada una de las siguientes preguntas de abstracción, indique tantas respuestas como pueda (por lo menos tres).

a) ¿Cómo puedo demostrar que dos números reales son iguales?
b) ¿Cómo puedo demostrar que dos triángulos son congruentes?
c) ¿Cómo puedo demostrar que dos rectas son paralelas?
d) ¿Cómo puedo demostrar que un cuadrilátero es un rectángulo?

2.6 Para cada uno de los siguientes problemas, 1) plantee una pregunta de abstracción, 2) contéstela abstractamente, y 3) aplique su respuesta al problema específico.

a) Si a, b y c son números reales para los cuales $a > 0$, $b < 0$ y $b^2 - 4ac = 0$, entonces la solución a la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ es positiva.
b) En la siguiente figura, si $\overline{SU}$ es la bisectriz perpendicular de $\overline{RT}$, y $\overline{RS} = \overline{2RU}$, entonces el triángulo RST es equilátero.



2.7 Para cada una de las siguientes hipótesis, indique tantas proposiciones como usted pueda (por lo menos tres) las cuales surgen como resultado de la aplicación de un paso del proceso regresivo.

a) El número real x satisface $x^2 - 3x + 2 < 0$.
b) El seno del ángulo X en el triángulo XYZ de la figura 2 es $1/\sqrt{2}$.
c) El círculo C consiste de todos los valores de x y y que satisfacen $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$.
d) El triángulo UVW es equilátero.

2.8 Considere el problema de demostrar que "Si x y z son números reales tales que $x^2 + 6y^2 - 25 = 0$ y $y^2 + x = 3$ entonces $|y| = 2$". Al trabajar progresivamente a partir de la hipótesis, ¿cuál de los siguientes incisos no es válido y por qué?

a) $y^2 = 3 - x$.
b) $y^2 = 25/6 - (x/\sqrt{6})^2$.
c) $(3 - y^2)^2 + 6y^2 - 25 = 0$.
d) $(x + 5) = -6y^2/(x - 5)$.

2.9 Considere el problema de demostrar que "Si x y y son números reales no negativos tales que $x + y = 0$ entonces $x = 0$ y $y = 0$".

a) Para la siguiente demostración condensada, escriba una explicación detallada de la demostración indicando los pasos progresivos y regresivos y las preguntas de abstracción y sus respuestas.
Demostración: Primero se demostrará que $x \leqslant 0$, y dado que por la hipótesis $x \geqslant 0$, entonces debe ser $x = 0$. Para ver que $x \leqslant 0$, por hipótesis $x + y = 0$, así que $x = -y$. También, ya que $y \geqslant 0$ se concluye que $-y \leqslant 0$ por lo cual $x = -y \leqslant 0$. Finalmente, para ver que $y = 0$, dado que $x = 0$ y $x + y = 0$, entonces debe ser $0 + y = y = 0$.||
b) Reescriba la demostración condensada de la parte *a*) a partir del proceso regresivo.

2.10 Considere un alfabeto que consiste de las letras "*s*" y "*t*", junto con las siguientes reglas para crear nuevas palabras a partir de las ya existentes. Las reglas pueden aplicarse en cualquier orden.

1. Duplique la palabra actual (por ejemplo: *sts* podría convertirse en *stssts*).
2. Elimine *tt* de la palabra actual (por ejemplo *stts* podría convertirse en *ss*).
3. Ponga *t* en la palabra actual en lugar de *sss* (por ejemplo: stsss podría convertirse en *stt*).
4. Añada la letra *t* a la derecha de la palabra actual si la última letra es *s* (por ejemplo: *tss* podría convertirse en *tsst*).

a) Aplique tres pasos del proceso progresivo para formar el mayor número de palabras posibles, aplicando las reglas anteriores repetidamente a la palabra inicial *s*.
b) Aplique un paso del proceso regresivo a la palabra *tst*. Específicamente, liste todas las palabras para las cuales la aplicación de una de las reglas anteriores produciría la palabra *tst*.

c) Demuestre que "Si *s* entonces *tst*".
d) Demuestre que "Si *s* entonces *ttst*".

2.11 Demuestre que si el triángulo rectángulo *XYZ* de la figura 2 es isósceles, entonces el área del triángulo es $z^2/4$.
2.12 Demuestre que la proposición en 2.6 *b*) es verdadera.

Capítulo 3

Acerca de las definiciones y la terminología matemática

En el capítulo anterior usted aprendió el método progresivo-regresivo y vio la importancia de formular y contestar la pregunta de abstracción. Uno de los modos más simples y eficaces de contestar una pregunta de abstracción es mediante el uso de una definición, como se explicará en este capítulo. También, aprenderá algo del "vocabulario" del lenguaje de las matemáticas.

Una *definición* es nada más una declaración en la cual se han puesto de acuerdo todas las personas interesadas. Usted ya ha encontrado una definición en el capítulo 1. Allí se definió lo que significa que la proposición "A implica B" sea verdadero. Específicamente, se acordó que es verdadero en todos los casos excepto cuando A es verdadero y B es falso. En ninguna parte se establece que usted debe aceptar esta definición como la correcta. Si decide no aceptarla, todos serán incapaces de comunicarse con usted respecto a esta idea en particular.

Las definiciones no están hechas al azar. Por lo común, están motivadas por un concepto matemático que ocurre repetidamente. En efecto, una definición puede considerarse como una forma para simplificar un concepto particular en el cual todos están de acuerdo. Tome, por ejemplo, el concepto de "un entero positivo mayor que uno el cual no es divisible entre ningún otro entero positivo excepto entre sí mismo o la unidad", lo cual es la simplificación (o definición) de

un "número primo". Seguramente, es más fácil decir "número primo" que "un entero positivo mayor que uno . . .", especialmente si el concepto aparece frecuentemente. Otros ejemplos de definiciones serían:

- **Definición 1**: Un entero n es divisible entre un entero m (escrito $n|m$) si $m = kn$ para algún entero k.
- **Definición 2**: Un entero positivo $p > 1$ es un número primo si los únicos enteros positivos que dividen a p son 1 y p.
- **Definición 3**: Un triángulo es isósceles si dos de sus lados son iguales.
- **Definición 4**: Dos pares de números reales (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son iguales si $x_1 = x_2$ y $y_1 = y_2$.
- **Definición 5**: Un entero n es par, sí y sólo si el residuo de la división entre 2 es 0.
- **Definición 6**: Un entero n es impar si y sólo si $n = 2k + 1$ para cualquier entero k.
- **Definición 7**: Un número real r es un número racional si y sólo si r puede expresarse como el cociente de dos enteros p y q en el cual el denominador q es diferente de 0.
- **Definición 8**: Dos proposiciones A y B son equivalentes si y sólo si "A implica B" y "B implica A".
- **Definición 9**: La proposición A y B (en símbolos $A \wedge B$), es verdadero si y sólo si A es verdadero y B es verdadero.
- **Definición 10**: La proposición A o B (en símbolos $A \vee B$), es verdadero en todos los casos excepto cuando A es falso y B es falso.

Observe que las palabras "si y sólo si" han sido usadas en algunas de las definiciones, pero en general, "sí" tiende a ser usada en lugar de "si y sólo si". Algunos términos como "conjunto" o "punto" no se han definido. Posiblemente uno podría tratar de definir un conjunto como una colección de objetos, pero no sería práctico el hacerlo así, ya que el concepto de un "objeto" es demasiado vago. Esto lo conduciría a preguntar por la definición de "objeto", y así continuar indefinidamente. Tales aspectos filosóficos están más allá del alcance de este trabajo.

En la demostración del ejemplo 1 se usó una definición para contestar una pregunta de abstracción. Recuerde la primera pregunta, la cual fue "¿cómo puedo demostrar que un triángulo es isósceles?" De acuerdo con la **definición 3**, para demostrar que un triángulo es isós-

celes, uno demuestra que dos de sus lados son iguales. Las definiciones son igualmente útiles en el proceso progresivo. Por ejemplo, si sabe que un entero n es impar, entonces por la definición 6 sabría que $n = 2k + 1$ para algún entero k. Es muy común en las demostraciones usar las definiciones tanto en el proceso progresivo como en el regresivo.

Ocurre a menudo que existen dos definiciones para un mismo concepto. Como ejemplo, considere el concepto de un número par, la cual se introdujo en la definición 5. Otra posible definición de un número par es: "un número entero que puede expresarse como el producto de 2 por otro número entero". Por supuesto, existe una sola definición para un concepto particular, pero cuando existen varias alternativas para un mismo concepto, ¿cómo seleccionar una de ellas y qué hacer con las otras posibles alternativas? Dado que una definición es simplemente algo que ha sido acordado, cualquiera de las alternativas puede utilizarse como definición. Una vez que se ha escogido la definición, es aconsejable establecer la "equivalencia" (ˆ) entre la definición seleccionada y las otras alternativas.

Para el caso de un número entero par, esto se lograría usando la definición 5 para crear la proposición A: "n es un entero cuyo residuo al ser dividido entre 2 es 0". Usando la definición alternativa se crea la proposición B: "n es un entero que puede expresarse como el producto de 2 por algún otro entero". Ahora, para establecer el hecho de que la definición 5 y la alternativa son equivalentes es necesario que usted demuestre que "A implica B", y que "B implica A" (definición 8). Entonces usted sabría que si A es verdadero (es decir, n es un entero cuyo residuo al ser dividido entre 2 es igual a 0), entonces y B es verdadero (es decir, n es un número entero que puede expresarse como el producto de 2 por algún otro entero). Y así, si B es verdadero, entonces, A es también verdadero.

La proposición de que A es equivalente a B se escribe a menudo como "A es verdadero si y sólo si B es verdadero", o simplemente "A si y sólo si B". En la notación matemática, uno solamente escribiría "$A \Leftrightarrow B$". Siempre que se le pida demostrar "A si y sólo si B", usted debe demostrar que "A implica B" y que "B implica A".

Es muy importante ser capaz de establecer que una definición es equivalente a otra alternativa. Suponga, por ejemplo, que en una demostración usted deduce la pregunta de abstracción: "¿cómo puedo demostrar que un número entero es par?" Como resultado de haber obtenido la equivalencia entre los dos conceptos, tiene ahora dos po-

sibles respuestas en sus manos. Una se obtiene directamente de la definición 5, por lo que una forma de demostrar que un entero es par es demostrando que su residuo al ser dividido entre 2 es igual a 0. La segunda respuesta se obtiene de la definición alternativa; es decir, usted puede demostrar que ese entero puede expresarse como el producto de 2 por algún otro entero. Similarmente, en el proceso progesivo, si usted sabe que n es un número par, tendría entonces dos posibles proposiciones las cuales son verdaderas como resultado de esto: la definición original y la alternativa. Mientras que la habilidad para responder a una pregunta de abstracción (realizando el proceso progesivo) en más de una forma puede ser obstáculo, como fue el caso en el ejemplo 1, también puede ser ventajoso, como se muestra en el siguiente.

Ejemplo 2: Si n es un entero par, entonces, n^2 es también un entero par.

Explicación detallada de la demostración: Si utiliza el método progresivo-regresivo, usted es conducido inmediatamente a la pregunta de abstracción "¿cómo puedo demostrar que un entero (n^2) es par?" Escogiendo la definición alternativa en lugar de la definición original, puede responder a este pregunta demostrando que n^2 puede expresarse como el producto de 2 por algún entero. Ahora, la pregunta es "¿Cual entero?" La respuesta a esta pregunta proviene del proceso progresivo.

Dado que n es un entero par, y usando la definición alternativa, n puede expresarse como el producto de 2 por algún entero k (es decir, $n = 2k$). Por lo que

$$n^2 = (n)(n) = (2k)(2k) = 4k^2 = 2(2k^2).$$

Entonces, se ha demostrado que n^2 puede escribirse como el producto de 2 por algún otro entero, siendo dicho entero igual a $2k^2$, y esto completa la demostración. Por supuesto, este problema podría también haber sido resuelto usando la **definición** 5, pero resultaría mucho más difícil hacerlo de esa manera.

***Demostración del ejemplo** 2.* Dado que n es un entero par, existe un

Es común usar definiciones durante el proceso progresivo para contestar ciertas preguntas de abstracción. Mientras más proposiciones equivalentes a la definición pueda demostrar, tendrá más recursos disponibles para usar en el proceso progresivo-regresivo; sin embargo, un gran número de proposiciones equivalentes pueden complicar también el proceso, debido a que se tendría que determinar cuál de todas las proposiciones se podría utilizar.

Existen cuatro términos en matemáticas que encontrará frecuentemente siempre que trate con demostraciones. Estos son: proposición, teorema, lema y corolario. Una proposición es un enunciado de interés que está tratando de demostrar. Todos los ejemplos que han sido presentados aquí son proposiciones. Algunas proposiciones son consideradas (subjetivamente) extremadamente importantes y se les llama *teoremas*. La demostración de un teorema puede ser muy larga, por lo que resulta más fácil comunicar la demostración por "partes". Por ejemplo, al demostrar el postulado "A implica B", puede ser necesario demostrar primero que "A implica C", luego, que "C implica D" y, finalmente, que "D implica B". Cada una de las proposiciones obtenidas podría presentarse por separado, y éstas se llaman *lemas*. En otras palabras, *un lema* es una proposición preliminar, la cual va a utilizarse en la demostración de un teorema. Una vez que un teorema ha sido establecido, sucede frecuentemente que ciertas proposiciones surgen casi inmediatamente como resultado de que el teorema es verdadero. A estas proposiciones se les denomina *corolarios*. En resumen, una proposición es un enunciado el cual usted trata de demostrar que es verdadero. Un teorema es una proposición importante. Un lema es una proposición preliminar que va a utilizarse en la demostración de un teorema, y un corolario es una proposición que surge como resultado inmediato de un teorema.

Así como existen ciertos conceptos matemáticos que se aceptan sin una definición formal, así también existen ciertas proposiciones las cuales se aceptan sin una demostración formal. A este tipo de proposiciones sin demostración se les llama *axiomas*. Un ejemplo de un axioma es el postulado: "la distancia más corta entre dos puntos es una línea recta". La descripción más detallada de los axiomas está fuera, del objetivo de este texto.

En la misma forma que se hace uso de una definición durante los procesos progresivo y regresivo, así también una proposición (previamente demostrada) puede utilizarse, como se muestra en el siguiente problema.

Ejemplo 3. Si el triángulo rectángulo *RST* con lados r y s, e hipotenusa t, satisface $t = \sqrt{2rs}$, entonces, el triángulo *RST* es isósceles (figura 5).

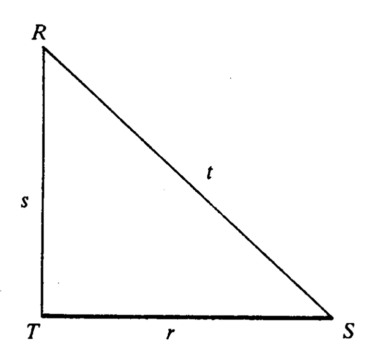


Figura 5. El triángulo rectángulo *RST*.

Explicación detallada de la demostración. El método progresivo-regresivo da origen a la pregunta de abstracción "¿Cómo puedo demostrar que un triángulo (*RST*) es isósceles?" Se obtiene una respuesta usando la **definición 3**, pero se obtiene también una segunda respuesta de la conclusión del **ejemplo 1**, la cual establece que el triángulo *XYZ* es isósceles. Tal vez el triángulo *RST* sea también isósceles por la misma razón que el triángulo *XYZ* lo es. Para averiguar esto es necesario ver si el triángulo *RST* satisface también la hipótesis del **ejemplo 1**, al igual que el triángulo *XYZ;* porque entonces el triángulo *RST* también satisface la conclusión, y, por lo tanto, es isósceles.

Al verificar la hipótesis del **ejemplo 1** para el triángulo *RST*, es necesario primero establecer una equivalencia entre la notación que se está usando en este problema, y la que se utilizó en el **ejemplo 1**. Específicamente, las longitudes de los lados del triángulo son $x = r$, $y = s$, y $z = t$. Entonces, para verificar la hipótesis del **ejemplo 1** en este problema, usted debe ver si el área del triángulo *RST* es igual a $1/4(t^2)$, o en su lugar, como el área del triángulo *RST* es igual a $1/2(rs)$, debe verificar si $1/2(rs) = 1/4(t^2)$.

El hecho de que $1/2(rs) = 1/4(t^2)$ se obtendrá trabajando progresivamente a partir de la hipótesis de que $t = \sqrt{2rs}$. Específicamente, elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad y dividiendo después entre 4, usted obtiene que $1/2(rs) = 1/4(t^2)$ tal como lo deseaba. Observe que la hipótesis del **ejemplo 1** requiere también que el

triángulo RST sea un triángulo rectángulo, lo cual efectivamente es cierto, como ha sido establecido en la hipótesis de este problema.

Observe que hubiera sido mucho más difícil establecer la equivalencia entre las notaciones si el triángulo hubiera sido denominado WXY con lados w y x, e hipotenusa y. Desafortunadamente, puede surgir (y surgirá) esta trasposición de notación, y cuando así sea, es particularmente importante mantener una simbología adecuada.

En la demostración condensada que se presenta a continuación, note la falta de referencia a la equivalencia entre la notación.

***Demostración del ejemplo** 3.* Por hipótesis tenemos que $t = \sqrt{2rs}$, por lo que $t^2 = 2rs$, o en forma equivalente, $1/4(t^2) = 1/2(rs)$. Entonces, el área del triángulo rectángulo RST es igual a $1/4(t^2)$. Por lo tanto, la hipótesis y, por consiguiente, la conclusión del **ejemplo 1** es verdadera. Consecuentemente, el triángulo RST es isósceles.||

Es muy común usar la conclusión de una proposición anterior para responder a una pregunta de abstracción. No olvide que hay que establecer una equivalencia entre la notación usada en el problema que se está resolviendo y la que se usó en la proposición previa, de tal manera que pueda verificarse la hipótesis de ésta.

Asociado a la proposición A, está la *NO* A (algunas veces $\sim A$). La proposición *NO* A es verdadera cuando A es falso y viceversa. En el capítulo 10 se tratará más acerca de la negación de una proposición.

Dados dos proposiciones A y B, usted ha aprendido el significado de la proposición "A implica B". Existen muchas maneras de decir que "A implica B" por ejemplo:

1. cuando A es verdadera, B debe ser también verdadera.
2. B se deduce de A.
3. B es una consecuencia necesaria de A.
4. A es condición suficiente para B.
5. A sólo si B.

Otras tres proposiciones relacionadas con "A implica B" son:

1. "B implica A" (llamado principio recíproco).
2. "*NO* A implica *NO* B" (llamado principio inverso).
3. "*NO* B implica *NO* A" (llamado principio contrapositivo).

La tabla 1 puede usarse para determinar cuándo cada uno de estos 3 postulados es verdadero. Por ejemplo, el principio contrapositivo "*NO B* implica *NO A*", es verdadero en todos los casos excepto cuando la proposición a la izquierda de la palabra "implica" (en este caso, *NO B*) es verdadera y la de la derecha de la palabra "implica" (en este caso, *NO A*) es falsa. En otras palabras, el principio contrapositivo es verdadero en todos los casos excepto cuando *B* es falsa y *A* es verdadera, como se muestra en la tabla 3.

Tabla 3. Tabla de verdad para "*NO B* implica *NO A*".

A	*B*	*NO B*	*NO A*	$A \Rightarrow B$	$NO\ B \Rightarrow NO\ A$
Verdadero	Verdadero	Falso	Falso	Verdadero	Verdadero
Verdadero	Falso	Verdadero	Falso	Falso	Falso
Falso	Verdadero	Falso	Verdadero	Verdadero	Verdadero
Falso	Falso	Verdadero	Verdadero	Verdadero	Verdadero

Observe en la tabla 3, que el principio "*NO B* implica *NO A*" es verdadero bajo las mismas circunstancias que "*A* implica *B*", es decir, en todos los casos excepto cuando *A* es verdadero y *B* es falso. Esta observación da lugar a una nueva técnica para hacer demostraciones conocidas como el método contrapositivo el cuál se describirá en el capítulo 9. Pueden obtenerse tablas de verdad similares a la tabla 3 para los principios recíproco e inverso, y se dejarán como ejercicios.

Este capítulo ha explicado el significado de muchos de los términos que se utilizan en el lenguaje de las matemáticas. También, se mostró cómo las definiciones y las proposiciones previamente demostradas pueden utilizarse en el método progresivo-regresivo. Ahora es tiempo de aprender más técnicas para hacer demostraciones.

EJERCICIOS

Nota: Todas las demostraciones deberán contener una explicación detallada de la misma así como una versión condensada.

3.1 Para cada una de las siguientes conclusiones, plantee una pregunta de abstracción. Luego, utilice una definición para 1) responder

1) la pregunta de forma abstracta, y 2) aplicar la respuesta al problema específico.

a) Si n es un entero impar, entonces, n^2 es un entero impar.
b) Si s y t son números racionales con $t \neq 0$, entonces, s/t es racional.
c) Suponga que a, b, c, d, e y f son números reales. Si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son números reales los cuales satisfacen:

$$ax_1 + by_1 = e, \; cx_1 + dy_1 = f,$$

$$ax_2 + by_2 = e, \; cx_2 + dy_2 = f,$$

entonces (x_1, y_1) es igual a (x_2, y_2).
d) Si n es un entero positivo mayor que 1, para el cual $2^n - 1$ es un número primo, entonces n es un número primo.
e) Si $(n - 1)$, n y $(n + 1)$ son tres enteros consecutivos, entonces la suma de sus cubos es divisible entre 9.

3.2 Para cada una de las siguientes hipótesis, utilice una definición para trabajar progresivamente (solamente un paso).

a) Si n es un entero impar, entonces n^2 es un entero impar.
b) Si s y t son números racionales con $t \neq 0$, entonces s/t es racional.
c) Si el triángulo RST es equilátero, entonces el área del triángulo es $\sqrt{3/4}$ veces el cuadrado de uno de sus lados.
d) Si el triángulo rectángulo XYZ de la figura 2 satisface sen(X) = cos (X), entonces el triángulo XYZ es isósceles.
e) Si a, b y c son enteros para los cuales $a|b$ y $b|c$, entonces, $a|c$.

3.3 Escriba tablas de verdad para las siguientes proposiciones.

a) El recíproco de "A implica B".
b) El inverso de "A implica B".
¿Cómo están relacionados (*a*) y (*b*)?
c) A o B.
d) A y B.
e) A y *NO* B.
f) (*NO* A) o B.
¿Cómo está relacionada *f*) con "A implica B"?

3.4 Para cada una de las siguientes proposiciones escriba los principios recíproco, inverso y contrapositivo.

a) Si n es un entero para el cual n^2 es par, entonces n es par.
b) Si r es un número real tal que $r^2 = 2$, entonces r no es racional.
c) Si el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo con un ángulo recto, entonces el cuadrilátero $ABCD$ es un rectángulo.
d) Si t es un ángulo para el cual $\text{sen}(t) = \cos(t)$ y $0 < t < \pi$, entonces $t = \pi/4$.

3.5 Demuestre que si n es un entero impar, entonces n^2 es un entero impar.
3.6. Demuestre que si n y m son números enteros impares, entonces mn es un entero impar.
3.7 Demuestre que si "A implica B" y "B implica C", entonces "A implica C".
3.8 Demuestre que si "A implica B", "B implica C" y "C implica A", entonces A es equivalente a B, y A es equivalente a C.
3.9 Suponga que usted tiene una definición A con la forma de una proposición, así como tres definiciones alternativas B, C y D.

a) ¿Cuántas demostraciones se requerirían para demostrar que A es equivalente a cada una de las tres alternativas?
b) ¿Cuántas demostraciones se requerirían para mostrar que "A implica B", "B implica C", "C implica D", y "D implica A"?
c) Explique por qué la estrategia en *b*) es suficiente para establecer que cada una de las alternativas es equivalente a la definición original (y a cada una de las otras).

3.10 Demuestre que si el triángulo rectángulo UVW con lados u y v, e hipotenusa w, satisface $\text{sen}(U) = \sqrt{u/2v}$, entonces el triángulo UVW es isósceles:

a) Utilizando la definición de un triángulo isósceles.
b) Verificando la hipótesis del ejemplo 1.
c) Verificando la hipótesis del ejemplo 3.

Capítulo 4

Cuantificadores 1a. parte: el método por construcción

En el capítulo anterior usted aprendió que una definición podría utilizarse con éxito para contestar una pregunta de abstracción. Los próximos cuatro capítulos le proporcionarán otras técnicas para formular y contestar una pregunta de abstracción que surge cuando B tiene una forma especial.

Dos formas particulares de B aparecen repetidamente en todas las ramas de las matemáticas. Estas formas pueden ser identificadas mediante ciertas palabras claves que aparecen en la proposición. La primera forma contiene la palabra "existe" ("existen") en tanto que la segunda contiene las palabras "para todo" ("para cada"). Estos dos grupos de palabras se denominan *cuantificadores* y cada uno de ellos dará lugar a una técnica para hacer demostraciones. El resto de este capítulo trata del *cuantificador existencial* "existe" y la técnica de demostración correspondiente denominada *método por construcción. El cuantificador universal* "para todo" y su técnica de demostración asociada se estudiarán en el próximo capítulo.

El cuantificador "existe" surge de manera natural en muchos postulados matemáticos. Recuerde que se definió un número racional (definición 7) como un número real que puede ser expresado como el cociente de dos enteros en el cual el denominador es diferente de cero.

Esta definición podría también haber sido escrita usando el cuantificador "existe".

- **Definición 11.** Un número real r es racional si y sólo si existen enteros p y q, con $q \neq 0$, tal que $r = p/q$.

Otro ejemplo surge de la definición alternativa de un entero par, la cual es un entero que puede expresarse como el producto de 2 por algún entero. Usando un cuantificador para expresar esto, se obtiene:

- **Definición 12.** Un entero n es par si y sólo si existe un entero k tal que $n = 2k$.

Es importante observar que el cuantificador "existe" permite la posibilidad de que exista más de un objeto, como se muestra en la siguiente definición:

- **Definición 13.** Un entero n es el cuadrado de un entero si existe un entero k tal que $n = k^2$.

Observe que si un entero n (por ejemplo, $n = 9$) es el cuadrado de un entero, usualmente existen dos valores de k, los cuales satisfacen $n = k^2$ (en este caso, $k = 3$ ó -3). En el capítulo 11 se hablará más acerca del tema de la unicidad (es decir, de la existencia de sólo uno de tales objetos).

Existen muchos otros ejemplos donde un cuantificador existencial puede ser, y será, utilizado, pero de los ejemplos anteriores usted puede ver que tales proposiciones siempre tienen la misma estructura básica. Cada vez que aparece el cuantificador "existe" o "existen", la proposición tendrá la siguiente forma básica:

Existe un "objeto" con una "cierta propiedad" tal que "algo sucede".

Las palabras entre comillas dependen de la proposición particular bajo consideración, y usted debe aprender a leer, identificar y escribir cada uno de los tres elementos. Considere estos ejemplos:

1. Existe un entero $x > 2$ tal que $(x^2 - 5x + 6) = 0$.
   Objeto: entero x.

Cierta propiedad: $x > 2$.
Algo sucede: $(x^2 - 5x + 6) = 0$.

2. Existen números reales x y y, ambos > 0, tales que $(2x + 3y) = 8$ y $(5x - y) = 3$.
Objeto: números reales x y y.
Cierta propiedad: $x > 0, y > 0$.
Algo sucede: $(2x + 3y) = 8$ y $(5x - y) = 3$

Los matemáticos usan a menudo el símbolo "E" para abreviar la palabra "existe" ("existen") y el símbolo "∈" para las palabras "tal que" ("para el cual", etc.). El uso de esos símbolos se ilustra en el siguiente ejemplo:

3. E un ángulo $t \in \cos(t) = t$.
Objeto: ángulo t.
Cierta propiedad: ninguna.
Algo sucede: $\cos(t) = t$.

Observe que las palabras "tal que" (o palabras equivalentes como "para el cual") siempre preceden al algo que sucede. Se necesita práctica para llegar a tener fluidez en la lectura y escritura de estas proposiciones.

Durante el proceso regresivo, si alguna vez encuentra una proposición que tenga el cuantificador "existe", una forma en la cual usted puede proceder para demostrar que la proposición es verdadera es mediante el método por construcción. La idea es generar (adivinar, producir, idear un algoritmo para producir, etc.) el objeto deseado. Desde luego que usted debe demostrar que el objeto tiene aquella cierta propiedad y, también, el algo que sucede. Lo que no es muy claro es cómo se elabora o genera realmente el objeto deseado. Algunas veces se hará mediante ensayo y error, otras veces, se puede diseñar algún algoritmo para producir el objeto deseado. Todo depende del problema en particular, pero en cualquier caso, la información en la proposición A se usará indudablemente para realizar el trabajo. Ciertamente, la aparición del cuantificador "existe" sugiere recurrir al proceso progresivo para producir el objeto deseado. El método por construcción fue utilizado sutílmente en el ejemplo 2 del capítulo 3, pero el ejemplo a continuación servirá para aclarar el proceso:

Ejemplo 4. Si a, b, c, d, e y f son números reales con la propiedad de que $(ad - bc) \neq 0$, entonces las dos ecuaciones lineales $(ax + by) = e$ y $(cx + dy) = f$ tienen solución para x y y.

Explicación detallada de la demostración. Al iniciar el proceso regresivo, usted debe observar que, aunque el cuantificador "existe" no aparece explícitamente, el postulado B tiene la forma estudiada anteriormente. Observe que la proposición B se puede escribir nuevamente para que contenga explícitamente dicho cuantificador; por ejemplo: "existen números reales x y y tales que

$$(ax + by) = e \text{ y } (cx + dy) = f\text{''}.$$

Usted debe ser cuidadoso ya que los postulados que contienen cuantificadores "ocultos" se presentan frecuentemente.

Procediendo con el método por construcción, la pregunta es cómo genera o elabora usted los números reales x y y tales que

$$(ax + by) = e \text{ y } (cx + dy) = f.$$

Si usted es lo suficientemente hábil para "adivinar" que

$$x = (de - bf)/(ad - bc)$$

y $y = (af - ce)/(ad - bc)$, entonces es muy afortunado, pero debe demostrar todavía que algo sucede, es decir, que $(ax + by) = e$ y que $(cx + dy) = f$. Por supuesto que lo anterior no es difícil de hacer. Observe que al adivinar esos valores de x y y, usted ha hecho uso de la información en A, dado que los denominadores no son iguales a 0.

Mientras que este enfoque de "adivinar y verificar" es perfectamente aceptable para producir la x y la y deseadas, el método no es muy informativo en lo que se refiere a cómo produjo usted esos valores particulares. Sería de desearse una demostración más instructiva. Por ejemplo, para obtener los valores de x y y, podría empezar con las dos ecuaciones $(ax + by) = e$ y $(cx + dy) = f$. Después de multiplicar la primera ecuación por d y la segunda por b y, luego, substraer la segunda ecuación de la primera, se obtiene $(ad - bc)x = (de - bf)$. Haciendo uso de la información en A, es posible dividir esta última ecuación entre $(ad - bc)$ dado que, por hipótesis, este número no es 0, obteniendo por lo tanto $x = (de - bf)/(ad - bc)$.

Puede utilizarse un proceso similar para obtener $y = (af - ce)/(ad - bc)$. Recuerde en este punto que una demostración es un argumento convincente. Como tal, el enunciado "un proceso similar puede utilizarse para obtener $y = (af - ce)/(ad - bc)$" podría no ser muy convincente, en cuyo caso, una demostración que se dirigierá a usted tendría que contener los detalles de cómo se obtiene y. En cualquier caso, usted debe todavía demostrar que, para esos valores de x y y, $(ax + by) = e$ y $(cx + dy) = f$ lo que completará la demostración.

Demostración del ejemplo 4. Al multiplicar la ecuación $(ax + by) = e$ por d, y la ecuación $(cx + dy = f$ por b, y efectuando la diferencia entre las dos ecuaciones, se obtiene $(ad - bc)\,x = (de - bf)$. A partir de la hipótesis, $(ad - bc) \neq 0$ y, por lo tanto, dividiendo entre $(ad - bc)$ se tiene $x = (de - bf)/(ad - bc)$. Un argumento similar muestra que $y = (af - ce)/(ad - bc)$, y no es difícil verificar que, para estos valores particulares de x y y, $(ax + by) = e$ y $(cx + dy) = f$. ∎

El método por construcción no es la única técnica disponible para tratar con proposiciones que contienen el cuantificador "existe", pero trabaja generalmente y debería considerarse con seriedad. Para tener éxito con el método por construcción, usted debe convertirse en un "constructor" y debe usar su habilidad creadora para generar el objeto deseado con aquella cierta propiedad, no olvide además demostrar que algo sucede. Su "material de construcción" consiste de la información contenida en A.

EJERCICIOS

Nota: Todas las demostraciones deberán contener una explicación detallada de la misma, así como una versión condensada.

4.1 Para cada una de las siguientes proposiciones, identifique los objetos, aquella cierta propiedad y el algo que sucede.

a) En los Himalayas existe una montaña de más de 20,000 pies de altura, la cual es más alta que cualquier otra montaña en el mundo.

b) Existe un entero x tal que $x^2 - 5x/2 + 3/2 = 0$.

c) A través de un punto P que no está en una línea ℓ, existe una línea ℓ' que pasa a través de P la cual es paralela a ℓ.

d) Existe un ángulo t entre 0 y $\pi/2$ tal que $\text{sen}(t) = \cos(t)$.
e) Entre los dos números reales x y y, existen números racionales distintos r y s para los cuales $|r - s| < 0.001$.

4.2 Escriba nuevamente los siguientes postulados utilizando los símbolos "E" y "∈".
a) Un triángulo XYZ es isósceles si dos de sus lados tienen igual longitud.
b) Dado un ángulo t, usted puede encontrar un ángulo t, cuya tangente es mayor que la de t.
c) En una fiesta de n personas, por lo menos dos de ellas tienen el mismo número de amigos.
d) Un polinomio $p(x)$ de grado n tiene exactamente n raíces complejas, $r_1, \ldots, r_n$ para las cuales $p(r_1) = \ldots = p(r_n) = 0$.

4.3 Demuestre que:

a) Existe un entero x tal que $x_2 - 5x/2 + 3/2 = 0$. ¿Es único este entero?
b) Existe un número real x tal que $x^2 - 5x/2 + 3/2 = 0$. ¿Es único este número real?

4.4 Demuestre que si a, b y c son enteros para los cuales $a|b$ y $b|c$ entonces $a|c$.

4.5 Demuestre que si s y t son números racionales y $t \neq 0$ entonces s/t es un número racional.

Capítulo 5

Cuantificadores 2a. parte: el método por selección

Este capítulo desarrolla el método por selección, una técnica para tratar con proposiciones que contienen el cuantificador "para todo". Tales proposiciones surgen de una manera natural en muchas áreas de las matemáticas, una de las cuales es la teoría de conjuntos, tópico al cual se le dedicará cierto tiempo aquí y ahora, debido a que mostrará el uso del cuatificador "para todo".

Un *conjunto* es una colección de objetos. Por ejemplo, los números 1, 4 y 7 pueden considerarse como una colección de objetos y, por lo tanto, forman un conjunto. Cada uno de los objetos individuales se denomina miembro o elemento del conjunto y de cada elemento del conjunto se dice que está en el conjunto o que pertenece a él. Un conjunto se denota usualmente encerrando la lista de sus miembros (separados por comas) entre corchetes. Así, el conjunto constituido por los números 1, 4 y 7 se escribiría $\{1, 4, 7\}$. Para indicar que el número 4 pertenece a este conjunto, los matemáticos escribirían "$4 \in \{1, 4, 7\}$", en donde el símbolo "$\in$" representa las palabras "es un elemento de". Similarmente, para indicar que 2 no es un elemento de $\{1, 4, 7\}$ uno escribiría "$2 \notin \{1, 4, 7\}$".

A pesar de que es ciertamente deseable hacer una lista de todos los elementos de un conjunto, algunas veces es impráctico hacerlo debido a que la lista es simplemente muy larga. Por ejemplo, imagínese tener que escribir cada número entero entre 1 y 100,000. Cuando un conjunto tiene un número infinito de elementos (tal como el conjunto de los números reales que son mayores o iguales que 0) sería realmente imposible hacer una lista completa, aunque usted qui-

siera hacerla. Afortunadamente existe una manera para describir tales conjuntos "grandes" por medio de lo que se conoce como *notación para describir conjuntos.* Esto implica usar una descripción verbal y matemática para denotar a los elementos del conjunto. Considere el ejemplo de los números reales que son mayores o iguales que 0. Uno escribiría S = {números reales x: $x \geqslant 0$}, donde el símbolo ":" representa las palabras "tal(es) que ". Todo lo que sigue a ":" se denomina la *propiedad que define al conjunto.* La pregunta que uno debe ser capaz de responder es: "¿Cómo sé si un objeto particular pertenece a un conjunto o no?" Para responder a esa pregunta, tan sólo necesita verificar si el objeto satisface la propiedad que define al conjunto. Si satisface dicha propiedad, entonces es un elemento del conjunto, y si no la satisface, simplemente no es un elemento del conjunto. En el ejemplo mencionado anteriormente, para saber si el número real 3 pertenece a S usted simplemente escribe 3 en lugar de la x y ve si la propiedad que define al conjunto es verdadera. En este caso, 3 pertenece a S porque $3 \geqslant 0$.

Algunas veces, parte de la propiedad que define al conjunto aparece tanto a la izquierda como a la derecha del simbolo ":". En esos casos, cuando trate de determinar si un objeto particular pertenece al conjunto, usted debe asegurarse de verificar también la parte de la propiedad que se encuentra a la izquierda. Por ejemplo, si T = {números reales $x \geqslant 0$: $(x^2 - x - 2) \geqslant 0$}, entonces -1 no pertenece a T aun cuando satisface la propiedad que define al conjunto que se encuentra a la derecha del símbolo ":". La razón es que -1 no satisface la propiedad a la izquierda del ":" dado que -1 no es $\geqslant 0$.

En una demostración, desde el punto de vista teórico, la propiedad que define al conjunto tiene la misma función que una definición, a saber, se usa para responder a la pregunta de abstracción: ¿Cómo puedo demostrar que un objeto pertenece a un conjunto particular?" Una respuesta sería verificar que el objeto satisface la propiedad que define al conjunto.

Observe que es posible que ningún objeto satisfaga la propiedad que define al conjunto. Considere, por ejemplo:

{números reales $\geqslant 0$: $(x^2 + 3x + 2) = 0$}.

Los únicos números reales para los cuales $(x^2 + 3x + 2) = 0$ son $x = -1$ y $x = -2$. Ninguno de estos satisface la propiedad a la izquierda del ":". Tal conjunto se dice que es *"vacío"*, queriéndose decir

que no posee elementos. El símbolo especial "$\emptyset$" se usa para denotar a los conjuntos vacíos.

Para ilustrar el uso del cuantificador "para todo", observe que, generalmente, es posible escribir un conjunto en varias formas. Por ejemplo, los conjuntos

$S=$ {números reales x: $(x^2 - 3x + 2) \leqslant 0$} y
$T=$ {números reales x: $1 \leqslant x \leqslant 2$
donde $1 \leqslant x \leqslant 2$ significa que $1 \leqslant x$ y $x \leqslant 2$.

Para que los dos conjuntos S y T sean iguales, se requiere que cada elemento de S esté en T y viceversa. Se puede hacer ahora la siguiente definición usando el cuantificador "para todo":

- **Definición 14**: Se dice que un conjunto S es un subconjunto de un conjunto T (se escribe $S \subseteq T$) si y sólo si cada x que está en S, está también en T.
- **Definición 15**: Se dice que dos conjuntos S y T son iguales (se escribe $S = T$) si y sólo si S es un subconjunto de T y T es un subconjunto de S.

Como cualquier definición, éstas pueden utilizarse para responder una pregunta de abstracción. La primera de ellas responde a la pregunta "¿Cómo puedo demostrar que un conjunto (S) es un subconjunto de otro conjunto (T)?", al requerir que usted demuestre que para cada elemento x que está en S, x está también en T. Como usted verá dentro de poco, el método por selección lo capacitará para "demostrar que para cada elemento x que está en S, x está también en T". La segunda definición responde la pregunta de abstracción "¿Como puedo mostrar que los dos conjuntos S y T son iguales?", cuando sea necesario que demuestre que S es un subconjunto de T y T es un subconjunto de S.

Además de su uso en la teoría de conjuntos, existen muchos otros ejemplos en los cuales el cuantificador "para todo" puede ser y será utilizado. En el ejemplo antes mencionado, usted puede ver que tales proposiciones parecen tener la misma estructura. Cuando aparecen los cuantificadores "para todo" o "para cada", el enunciado tendrá la siguiente forma básica (la cual es similar a la que usted vió en el capítulo anterior):

Para cada "objeto" con una "cierta propiedad", "algo sucede" (ˆ).

Las palabras entre comillas dependen del enunciado particular bajo consideración, y usted debe aprender a leer, escribir e identificar los tres elementos. Considere estos ejemplos:

1. Para cada ángulo t, $\text{sen}^2(t) + \cos^2(t) = 1$
   Objeto: ángulo t
   Cierta propiedad: ninguna
   Algo sucede: $\text{sen}^2(t) + \cos^2(t) = 1$

   Los matemáticos frecuentemente utilizan el símbolo "∀" para abreviar las palabras "para todo" ("para cada", etc.). El uso de los símbolos se ilustra en el siguiente ejemplo:

2. ∀ número real $y > 0$; ∃ un real x $2^x = y$.
   Objeto: números reales y
   Cierta propiedad: $y > 0$
   Algo sucede: un número real x $2^x = y$.

Observe que una coma siempre precede al algo que sucede. Algunas veces el cuantificador está "oculto", por ejemplo, el enunciado "el coseno de cualquier ángulo estrictamente entre 0 y $\pi/4$ es mayor que el seno del ángulo" igualmente podría haber sido expresado como: "para cada ángulo t con $0 < t < \pi/4$, $\cos(t) > \text{sen}(t)$". Se requiere práctica para leer y escribirestas proposiciones con fluidez.

Durante el proceso regresivo, si usted se encuentra una proposición que tiene el cuantificador "para todo" en la forma estudiada anteriormente, una manera en la cual usted podría ser capaz de demostrar que es verdadera es haciendo una lista de todos los objetos que poseen aquella cierta propiedad. Entonces, para cada uno de ellos, usted podría tratar de demostrar que algo sucede. Cuando la lista es finita, ésta podría ser una manera razonable de proceder; sin embargo, con mucha frecuencia esto no será prácticamente posible debido a que la lista es muy larga, o incluso infinita. Usted ya ha tratado con este tipo de obstáculos en la teoría de conjuntos donde el problema fue resuelto usando la propiedad que describe al conjunto. Aquí, el método por selección le permitirá salvar esta dificultad.

El método por selección puede extenderse como una máquina que hace demostraciones la cual, más que verificar realmente que

algo suceda para todos y cada uno de los objetos que tengan una cierta propiedad, tiene la capacidad de hacer las demostraciones. Si usted tuviera tal máquina, entonces no tendría la necesidad de verificar realmente toda la lista (posiblemente infinita) porque sabría que la máquina podría hacerlo siempre. El método por selección le enseña cómo diseñar el mecanismo interno de la máquina que hace las demostraciones.

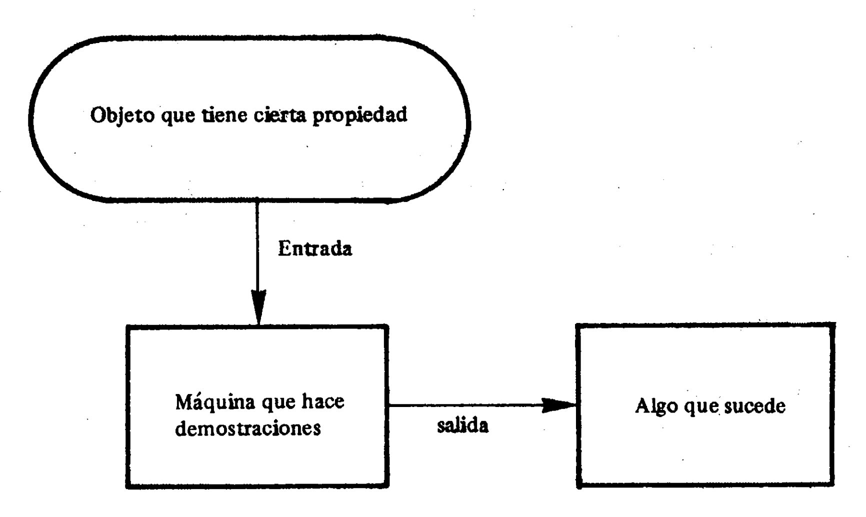


Figura 6 La máquina que hace demostraciones para el método por selección.

Para entender la mecánica del método por selección, póngase usted en el papel de la máquina que hace demostraciones y tenga en mente que usted necesita tener la capacidad de tomar cualquier objeto con cierta propiedad y concluir que algo sucede (figura 6). Como tal, suponga que alguien le dio uno de esos objetos, pero recuerde, usted no sabe precisamente cuál. Todo lo que usted sabe es que el objeto particular posee aquella cierta propiedad, y debe usar dicha propiedad para llegar a la conclusión de que algo sucede. Esto se logra con más facilidad trabajando progresivamente a partir de aquella cierta propiedad y regresivamente a partir de lo que sucede. En otras palabras, con el método por selección usted selecciona un objeto el cual tiene cierta propiedad. Entonces, usando el método progresivo-regresivo, usted debe concluir que, para el objeto seleccionado, algo sucede. Entonces, su máquina para hacer demos-

traciones tendrá la capacidad de repetir la demostración para cualquiera de los objetos que tienen aquella cierta propiedad.

Suponga, por ejemplo, que en alguna demostración, usted necesita demostrar que para todo los números reales x con $x^2 - 3x + 2 \leqslant 0$, $1 \leqslant x \leqslant 2$. Usando el método por selección usted escogería uno de dichos números reales, por ejemplo, x', el cual tiene aquella cierta propiedad (en este caso, $(x')^2 - 3x' + 2 \leqslant 0$). Entonces, trabajando progresivamente a partir del hecho que $(x')^2 - 3x' + 2 \leqslant 0$, usted debe llegar a la conclusión de que, para x', algo sucede, es decir, $1 \leqslant x' \leqslant 2$.

Aquí se utiliza el símbolo "x'" para distinguir el objeto seleccionado del objeto general, "x". Esta distinción se ignora frecuentemente (es decir, el mismo símbolo se usa para el objeto general y para el objeto seleccionado) y usted debe interpretar cuidadosamente el símbolo correcto. Considere el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5. Si

$S = \{$números reales x: $(x^2 - 3x + 2) \leqslant 0\}$, y
$T = \{$números reales x: $1 \leqslant x \leqslant 2\}$,
entonces $S = T$.

Explicación detallada de la demostración. El proceso regresivo conduce a la pregunta de abstracción "¿Cómo puedo demostrar que dos conjuntos (S y T) son iguales?" La **definición 15** proporciona la respuesta. Usted debe demostrar que S es un subconjunto de T y T es un subconjunto de S, así que, primero trate de demostrar que S es un subconjunto de T y después que T es un subconjunto de S.

Para demostrar que S es un subconjunto de T, usted formula la pregunta de abstracción: "¿Cómo puedo demostrar que un conjunto (S) es un subconjunto de otro conjunto (T)?" De nuevo, usando la definición, se obtiene la respuesta. Es decir, debe demostrar que, para toda x en S, x está en T. Este nuevo enunciado B_1 tiene claramente la forma descrita con anterioridad, indicando así que usted debe utilizar el método por selección. Para hacerlo, seleccione un objeto con una cierta propiedad y demuestre que algo sucede. En este caso eso significa que usted debe escoger un elemento x en S y, sabiendo que x está en S (es decir, que x satisface la propiedad que define a S), junto con la información en A, usted debe demostrar que x está en T. Observe que usted no quiere escoger un elemento específico en S, di-

gamos 3/2. También, note el doble uso del símbolo "x" para el objeto general y para el objeto seleccionado.

El postulado "x está en T" se convierte ahora en B_2 y usted debe aplicar el proceso de abstracción a B_2 para formular la pregunta de abstracción "¿Cómo puedo demostrar que un objeto (x) pertenece a un conjunto (T)?" y obtener la respuesta que es la que usted debe demostrar, es decir, que x satisface la propiedad que define a T, (que $1 \leqslant x \leqslant 2$), hacia la cual deben encaminarse sus esfuerzos.

Regresando ahora al proceso progresivo, usted puede hacer uso de la información en A para demostrar que $1 \leqslant x \leqslant 2$ debido a que usted ha supuesto que A es verdadero. Sin embargo, existe información adicional disponible. Recuerde que, durante el proceso regresivo, usted hizo uso del método por selección, y seleccionó un elemento x de S. Ahora es tiempo de hacer uso del hecho de que x está en S, específicamente, ya que x está en S, y a partir de la propiedad que define a S, se tiene $(x^2 - 3x + 2) \leqslant 0$. Factorizando, se obtiene $(x - 2)(x - 1) \leqslant 0$. La única manera en la cual el producto de los dos números $(x - 2)$ y $(x - 1)$ puede ser $\leqslant 0$ es que uno de ellos sea $\leqslant 0$ y el otro $\geqslant 0$. En otras palabras, o $(x - 2) \geqslant 0$ y $(x - 1) \leqslant 0$, o $(x - 2) \leqslant 0$ y $(x - 1) \geqslant 0$. La primera situación no puede ocurrir nunca debido a que si esto ocurriera, $x \geqslant 2$ y $x \leqslant 1$, lo cual es imposible. Así, la segunda condición debe suceder (es decir, $x \leqslant 2$ y $x \geqslant 1$), pero es precisamente la última proposición obtenida en el proceso regresivo y, por lo tanto, se ha demostrado que S es un subconjunto de T. No olvide que, con la finalidad de completar la demostración de que $S = T$, usted tiene que demostrar todavía que T es un subconjunto de S. Esta parte se dejará como ejercicio.

Observe que cuando usted utiliza el método por selección, obtiene información adicional la cual se añade a la suposición de que A es verdadero. Invariablemente, durante el proceso progresivo usted hará uso de esa información adicional.

***Demostración del ejemplo** 5.* Para demostrar que $S = T$ se demostrará que S es un subconjunto de T y T es un subconjunto de S. Para ver que S es un subconjunto de T, sea x un elemento de S (el uso de la palabra "sea" indica frecuentemente que el método por selección ha sido invocado). Consecuentemente, $(x^2 - 3x + 2) \leqslant 0$, o que es lo mismo, $(x - 2)(x - 1) \leqslant 0$. Esto significa que o bien $(x - 2) \geqslant 0$ y $(x - 1) \leqslant 0$, o $(x - 2) \leqslant 0$ y $(x - 1) \geqslant 0$. Lo primero no puede suceder dado que eso implicaría que $x \geqslant 2$ y $x \leqslant 1$. Entonces, debe ser

que $x \leqslant 2$ y $x \geqslant 1$, lo cual significa que x está en T. Se omite la demostración de que T es un subconjunto de S. ||

El método por selección es un enfoque viable para tratar con proposiciones que contienen el cuantificador "para todo". Proceda seleccionando un objeto que tenga una cierta propiedad. Añada esta información a la proposición A y demuestre que algo sucede usando el método progresivo-regresivo.

EJERCICIOS

Nota: Todas las demostraciones deberán contener una explicación detallada de la misma así como una versión condensada.

5.1 Para cada una de las siguientes definiciones, identifique los objetos, una propiedad particular y lo que sucede.

a) El número real x^* es un máximo de la función f si para cada número real x, $f(x) \leqslant f(x^*)$.

b) Suponga que f y g son funciones de una variable. Entonces, g es $\geqslant f$ en el conjunto S de números reales si para cada elemento x en S, $g(x) \geqslant f(x)$.

c) El número real u es un límite superior para un conjunto S de números reales si para cada x en S, $x \leqslant u$.

d) El número real u es el límite mínimo superior para un conjunto S de números reales si u es un límite superior para S y $\forall$ número real $\varepsilon' > 0$, $x \in S$ $x > u - \varepsilon$.

e) Un conjunto C de números reales es convexo si para todo elemento x y y en C, y para todo número real t entre 0 y 1, $tx +$ $(1 - t)\, y$ es un elemento de C.

f) Una función f de una variable es convexa si para todo número real x y y, y para toda $0 \leqslant t \leqslant 1, f(tx + (1 - t) \leqslant (y) \leqslant tf(x)$ $+ (1 - t) f(y)$.

g) Una función f de una variable es continua en el punto x si para todo número real $\varepsilon > 0$, existe un número real $\delta > 0$ tal que para todo número real y con $|x - y| < \delta$, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

h) Suponga que x, x^1, x^2, . . . son números reales. La sucesión $x^1, x^2, \ldots$ converge en x si $\forall$ número real $\varepsilon > 0$, un entero k' tal que, $\forall$ entero $k > \exists'$, $|x^k - x| < \varepsilon$.

5.2 Para cada una de las partes del ejercicio 5.1, describa cómo se aplicaría el método por selección. Utilice un símbolo diferente para distinguir al objeto seleccionado del objeto general. Por ejemplo, en el ejercicio 5.1 *a*), para demostrar que x^* es el máximo de la función *f*, se escogería un número real, x', para el cual debe entonces demostrarse que $f(x') \leqslant f(x^*)$. Por consiguiente, al aplicar el método por selección en el ejercicio 5.1 *a*) uno diría: "Sea x' un número real. Se demostrará que $f(x') \leqslant f(x^*)$."

5.3 Considere el problema de demostrar que "para todo objeto x con una cierta propiedad, algo sucede". Analice por qué el planteamiento del método por selección es el mismo que el del método progresivo-regresivo en la demostración de que "si x es un objeto con una cierta propiedad, entonces, algo sucede". ¿Cómo están relacionados los dos enunciados que se encuentran entre comillas?

5.4 Escriba nuevamente los siguientes postulados utilizando los símbolos apropiados: $\forall, \exists, \ni$.

a) Alguna montaña es más alta que cualquier otra montaña.
b) Si t es un ángulo, entonces, $\text{sen}(2t) = 2\ \text{sen}(t) \cos(t)$. (sugerencia: utilice el ejercicio 5.3.)
c) La raíz cuadrada del producto de dos números reales no negativos cualesquiera p y q es siempre menor o igual que la suma de estos dos dividida entre 2.
d) Si x y y son números reales tales que $x < y$, entonces, existe un número racional r tal que $x < r < y$.

5.5 Para cada uno de los siguientes enunciados, indique cuáles técnicas para hacer demostraciones usaría usted (selección, construcción o ambas) y en qué orden. Además, explique cómo se aplicaría la técnica al problema en particular, es decir, qué construiría, qué seleccionaría, etc.

a) Existe un número real $M > 0$ tal que, para todos los elementos x en el conjunto S de números reales, $|x| \leqslant M$.
b) Para todos los números reales $M > 0$, existe un elemento x en el conjunto S de números reales tal que $|x| > M$.
c) $\forall$ número real $\varepsilon > 0$, $\exists$ un número real δ K $0 \ni \forall$ número real x y y con $|x - y| < \delta$, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, (donde f es una función de una variable).

5.6 Para los conjunstos S y T del ejemplo 5, demuestre que $T \subseteq S$.
5.7 Demuestre que para todo número real $x > 2$, existe un número real $y < 0$ tal que $x = 2y/(1 + y)$.
5.8 Demuestre que si m y b son números reales y f es una función definida por $f(x) = mx + b$, entonces f es convexa. (Sugerencia: utilice la definición del ejercicio 5.1 f).)

Capítulo 6

Cuantificadores 3a. parte: inducción

En el capítulo anterior usted aprendió a usar el método por selección cuando el cuantificador "para todo" aparece en el enunciado B. Existe una forma muy especial de B para la cual se ha desarrollado separadamente una técnica de demostración conocida como *inducción matemática*. Inducción debe considerarse seriamente (aún antes que el método por selección) cuando B tiene la forma:

Para todo entero $n \geqslant 1$, "algo sucede",

donde el algo que sucede es algún enunciado que depende del entero n. Por ejemplo:

Para todo entero $n \geqslant 1$, $\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2$,

donde $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + \ldots + n$.

Cuando se considera el método por inducción, las palabras claves que se deben buscar son "entero" y "$\geqslant 1$".

Una manera de demostrar tales enunciados es haciendo una lista infinita de problemas, uno para cada uno de los enteros partiendo de $n = 1$ y, entonces, demostrar cada proposición por separado. En tanto que para los primeros problemas de la lista es fácil de demostrar

las proposiciones, para el enésimo y los siguientes es mucho más difícil. Para el ejemplo anterior, la lista sería:

$P(1)$: $\sum_{k=1}^{1} k = 1(1+1)/2$ ó $1 = 1$

$P(2)$: $\sum_{k=1}^{2} k = 2(2+1)/2$ ó $1 + 2 = 3$

$P(3)$: $\sum_{k=1}^{3} k = 3(3+1)/2$ ó $1 + 2 + 3 = 6$

.
.
.

$P(n)$: $\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2$

$P(n+1)$: $\sum_{k=1}^{n+1} k = (n+1)[(n+1)+1]/2 = (n+1)(n+2)/2$

.
.
.

Inducción es un método ingenioso para demostrar que es verdadero cada uno de estos enunciados en la lista infinita. Así como con el método por selección, se puede pensar en la inducción como una máquina automática que resuelve problemas, la cual comienza con $p(1)$ y continúa sobre la lista de manera progresiva demostrando cada proposición. Aquí está cómo trabaja. Usted hace que empiece la máquina verificando que $P(1)$ es verdadero, lo cual se puede hacer fácilmente en el ejemplo anterior. A continuación, introduzca $P(1)$ en la máquina. Esta utiliza el hecho de que $P(1)$ es verdadero y automáticamente demuestra que $P(2)$ es verdadero. Entonces tome $P(2)$ e introdúzcalo en la máquina. De nuevo, ella utiliza el hecho de que $P(2)$ es verdadero para obtener la conclusión de que $P(3)$ es verdadero, y así sucesivamente (figura 7). Observe que cuando la máquina va a demostrar que $P(n+1)$ es verdadero, ella ya habrá demostrado que $P(n)$ es verdadero (en el paso anterior). Así, al diseñar la máquina, usted puede suponer que $P(n)$ es verdadero, y su trabajo consiste en asegurar que $P(n+1)$ también será verdadero. No olvide que, para empezar el proceso, usted debe verificar que $P(1)$ es verdadero.

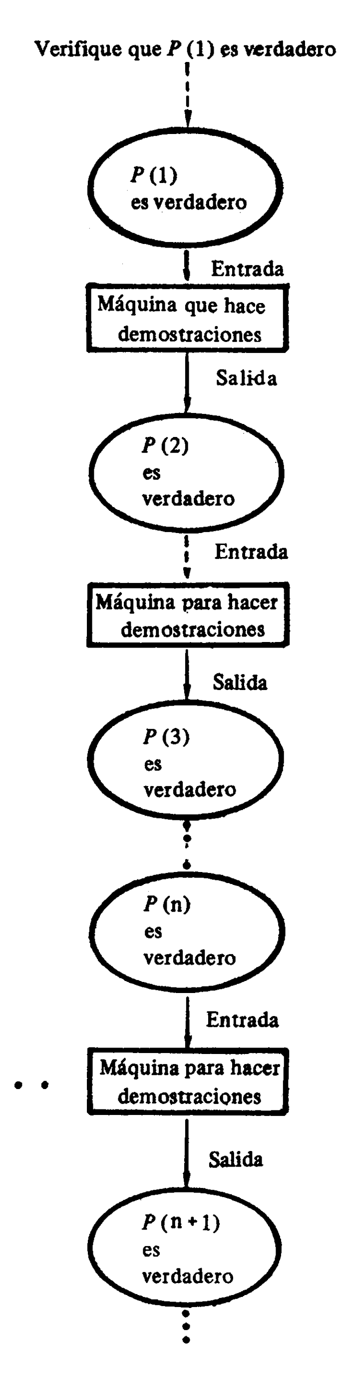


Figura 7. La máquina que hace demostraciones (ˆ) por inducción.

Repitiendo, una demostración por inducción consiste de dos pasos. El primero es verificar que el postulado $P(1)$ es verdadero. En general, esto es fácil de hacer. Simplemente, sustituya cada n por 1. Por lo común, para verificar que el enunciado obtenido es verdadero, usted sólo tendrá que hacer algunas operaciones algebraicas.

El segundo paso tiene mayor dificultad. Este requiere que usted llegue a la conclusión de que $P(n + 1)$ es verdadero, utilizando la suposición de que $P(n)$ es verdadero. Existe una forma muy común para hacer esto. Comience escribiendo el enunciado $P(n + 1)$. Ya que a usted se le permite suponer que $P(n)$ es verdadero y quiere concluir que $P(n + 1)$ es verdadero, deberá tratar de escribir de alguna manera el postulado $P(n + 1)$ en términos de $P(n)$ (como se ilustrará en un momento), ya que entonces, podrá hacer uso de la suposición de que $P(n)$ es verdadero. Al establecer que $P(n + 1)$ es verdadero, la demostración estará completa.

Ejemplo 6. Para todo entero $n \geqslant 1$, $\sum_{k=1}^{n} k = n(n + 1)/2$.

Explicación detallada de la demostración. Cuando se usa el método por inducción, es útil escribir el postulado $P(n)$, en este caso:

$$P(n)\colon \sum_{k=1}^{n} k = n(n + 1)/2.$$

El primer paso en una demostración por inducción es verificar $P(1)$. Reemplazando cada n por 1 en $P(n)$, se obtiene:

$$P(1)\colon \sum_{k=1}^{1} k = 1(1 + 1)/2.$$

Con unos pocos pasos más, es fácil verificar esta proposición, ya que

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = 1(1 + 1)/2.$$

Con frecuencia, este paso es tan sencillo que se omite virtualmente en la demostración condensada, diciendo simplemente: "La proposición se cumple para $n = 1$".

El segundo paso es más complicado. Usted debe hacer uso de la suposición de que $P(n)$ es verdadero para llegar a la conclusión de que $P(n + 1)$ es verdadero. La mejor manera de proceder es escribir el enunciado $P(n + 1)$ reemplazando cuidadosamente toda n por $n + 1$ en $P(n)$, y realizando algunas operaciones algebraicas si es necesario.

En este caso:

$$P(n+1)\colon \sum_{k=1}^{n+1} k = (n+1)[(n+1)+1]/2 = (n+1)(n+2)/2.$$

Para llegar a la conclusión de que $P(n+1)$ es verdadero, comience con la expresión al lado izquierdo de la igualdad en $P(n+1)$, y trate de que se parezca a la expresión de lado derecho. Al hacerlo, usted deberá hacer uso de la información en $P(n)$, relacionando el lado izquierdo de la igualdad en $P(n+1)$ con el lado izquierdo de la igualdad en $P(n)$, porque entonces usted podrá utilizar el lado derecho de la igualdad en $P(n)$. En este ejemplo,

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1).$$

Ahora puede hacer uso de la suposición de que $P(n)$ es verdadero reemplazando

$$\sum_{k=1}^{n} k$$

por $n(n+1)/2$, obteniendo

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = [n(n+1)/2] + (n+1).$$

Todo lo que queda por hacer es un poco de álgebra para pasar de $[n(n+1)/2 + (n+1)]$ a $[(n+1)(n+2)/2]$, obteniendo así el lado derecho de la igualdad de $P(n+1)$. Los pasos algebraicos son:

$$\begin{aligned} n(n+1)/2 + (n+1) &= (n^2+n)/2 + 2(n+1)/2 \\ &= (n^2+3n+2)/2 \\ &= (n+1)(n+2)/2 \end{aligned}$$

En resumen,

$$\begin{aligned} 1 + \ldots + (n+1) &= (1 + \ldots + n) + (n+1) \\ &= n(n+1)/2 + (n+1) \\ &= (n^2+3n.+2)/2 \\ &= (n+1)(n+2)/2 \end{aligned}$$

Su habilidad para relacionar $P(n+1)$ con $P(n)$, así como usar la hipótesis de inducción de que $P(n)$ es verdadero, determinará el éxito de

la demostración por inducción. Si no puede relacionar $P(n + 1)$ con $P(n)$, tal vez usted desee considerar una técnica diferente para proceder con la demostración.

Demostración del ejemplo 6. Claramente, el enunciado es verdadero para $n = 1$. Suponga que es verdadero para n (es decir, que $1 + \ldots + n = n(n + 1)/2$). Entonces:

$$\begin{aligned} 1 + \ldots + (n + 1) &= (1 + \ldots + n) + (n + 1) \\ &= n(n + 1)/2 + 2(n + 1)/2 \\ &= (n^2 + 3n + 2)/2 \\ &= (n + 1)(n + 2)/2 \end{aligned}$$

siendo esta última expresión igual a $P(n + 1)$.

Cuando se usa el método por inducción, no es necesario que el primer valor de n tenga que ser 1. Por ejemplo, el enunciado "para todo entero $n \geqslant 5$, $2^n > n^2$" también puede demostrarse por inducción. La única modificación es que para poder echar a andar la máquina que hace las demostraciones, usted debe verificar $P(n)$ para el primer valor posible de n. En este caso, ese primer valor será $n = 5$, así que usted tendrá que verificar que $2^5 > 5^2$ (lo cual, por supuesto, es cierto ya que $2^5 = 32$ y $5^2 = 25$). El segundo paso de la demostración por inducción sería idéntico. Le quedaría por demostrar que si $P(n)$ es verdadero (es decir, $2^n > n^2$), entonces $P(n + 1)$ es también verdadero (es decir, $2^{n+1} > (n + 1)^2$). Al hacer esto, usted también puede utilizar el hecho de que $n \geqslant 5$ si es necesario.

Otra modificación al método básico de inducción surge cuando usted tiene dificultades al relacionar $P(n + 1)$ con $P(n)$. Suponga que puede relacionar $P(n + 1)$ con $P(j)$, donde $j < n$. En este caso, a usted le gustaría hacer uso del hecho de que $P(j)$ es verdadero, pero ¿puede suponer que $P(j)$ es efectivamente verdadero? ¡La respuesta es sí! Para ver porqué, recuerde la analogía de la máquina que hace demostraciones y observe que, cuando la máquina tiene que demostrar que $P(n + 1)$ es verdadero, ella ya ha establecido que todas las proposiciones $P(1), \ldots, P(j), \ldots, P(n)$ son verdaderos (vea de nuevo la figura 7). Así que cuando se trata de demostrar que $P(n + 1)$ es verdadero, usted puede suponer que $P(n)$ y todas las proposiciones que lo preceden son verdaderos. Tal demostración se conoce como *inducción generalizada.*

La inducción es una técnica muy poderosa cuando es aplicable; sin embargo, es importante observar que la inducción no le ayuda a

descubrir la forma correcta del enunciado $P(n)$. La inducción sólo verifica que una proposición dada es vardadera para todos los enteros $\geqslant$ a alguno inicial. La clave del éxito está en su habilidad para relacionar $P(n+1)$ con $P(n)$ o con algún enunciado previo, pero no olvide verificar que el enunciado es también verdadero para el primer valor posible de n.

EJERCICIOS

Nota: No es necesario que las demostraciones de este capítulo contengan una explicación detallada de la misma.

6.1 ¿Para cuáles de las siguientes proposiciones sería directamente aplicable el método de inducción? Cuando no sea aplicable explique el porqué.

a) Para cada entero positivo n, 8 divide a $5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$.
b) Existe un entero $n \geqslant 0$ tal que $2^n > n^2$.
c) Para cada entero $n \geqslant 1$, $1\,(1!) + \ldots + n(n!) = (n+1)! - 1$. (Donde $n! = n(n-1) \ldots 1$).
d) Para cada entero $n \geqslant 4, n! > n^2$.
e) Para cada número real $n \geqslant 1, n^2 \geqslant n$.

6.2 *a*) ¿Cómo y cuando utilizaría el método por inducción en lugar del método por selección?
b) ¿Por qué no es posible utilizar inducción en postulados de la forma: Para cada "objeto" con una "cierta propiedad", "algo sucede"?

6.3 Demuestre por inducción que para cada entero $n \geqslant 1$, $1\,(1!) + \ldots + n(n!) = (n+1)! - 1$.
6.4 Demuestre por inducción que para cada entero $n \geqslant 5, 2^n > n^2$.
6.5 Demuestre por inducción que un conjunto de $n \geqslant 1$ elementos tiene 2^n subconjuntos (incluyendo el conjunto vacío).
6.6 Demuestre sin utilizar el método por inducción que para cada entero $n \geqslant 1, 1 + \ldots + n = n(n+1)/2$.
6.7 Demuestre que para cada entero $n \geqslant 1$, 6 divide a $n^3 - n$ estableciendo que 1) el enunciado es verdadero para $n = 1$, y 2) si el enunciado es verdadero para $(n-1)$ entonces, también es verdadero para n.

6.8 Describa un procedimiento de inducción "modificado", el cual pudiera utilizarse para demostrar proposiciones de la forma:

a) Para cada entero menor o igual que algún entero inicial, algo sucede.
b) Para cada entero, algo sucede.
c) Para cada entero positivo impar, algo sucede.

6.9 Indique lo que es incorrecto en la siguiente demostración de que todos los caballos tienen el mismo color.

Demostración: Sea n el número de caballos. Para $n = 1$ el postulado es verdadero, es decir, un caballo tiene el mismo color (cualquier color). Suponga que en cualquier grupo de n caballos todos tienen el mismo color. Ahora, considere un grupo de $(n + 1)$ caballos. Tomando cualesquiera n de ellos, la hipótesis de inducción establece que todos ellos tienen el mismo color, por ejemplo, marrón. Lo que queda por determinar es el color del otro caballo. Por consiguiente, considere dentro del mismo grupo de $(n + 1)$ caballos otro grupo de n caballos que contenga el caballo cuyo color se desconoce. De nuevo, por la hipótesis de inducción, todos los caballos en este nuevo grupo deben tener el mismo color. Luego, dado que todos los caballos en este grupo son de color marrón, el caballo cuyo color se desconoce debe ser también de color marrón. ||

Capítulo 7

Cuantificadores 4a. parte: particularización

En los tres capítulos precedentes usted descubrió qué hacer cuando un cuantificador aparece en el enunciado *B*. En este capítulo se desarrolla un método para aprovechar cuantificadores que aparecen en el enunciado *A*. Cuando el enunciado *A* contiene el cuantificador "existe" en la siguiente forma:

> Existe un "objeto" con una "cierta propiedad" tal que "algo sucede"

usted puede hacer uso de dicha información de una manera muy directa. Al demostrar que "*A* implica *B*" por el método progresivo-regresivo, usted está suponiendo que *A* es verdadero y, en este caso, significa que puede suponer que existe ciertamente un objeto con cierta propiedad tal que algo sucede. Al hacer la demostración usted diría: "Sea x un objeto con cierta propiedad y para el cual algo sucede...". La existencia de este objeto será usada de alguna manera en el proceso progresivo para llegar a la conclusión de que *B* es verdadero.

Una situación más interesante se presenta cuando el enunciado *A* contiene el cuantificador "para todo" en la forma usual:

> Para todos los "objetos" con una "cierta propiedad", "algo sucede".

Para utilizar esta información surge un método típico que se denomina *particularización*. Como resultado de suponer que *A* es verdadero, us-

ted sabe que algo sucede para todos los objetos con la cierta propiedad. Si en algún momento del proceso regresivo usted se encuentra con alguno de estos objetos que tienen cierta propiedad, entonces usted puede hacer uso de la información en A y poder concluir que, para este objeto en particular, el "algo" sucede en realidad. Eso le debe ayudar a concluir que B es verdadero. En otras palabras, usted habrá particularizado la proposición A a un objeto específico que tiene cierta propiedad. Por ejemplo, si usted sabe que para todo ángulo t, $\text{sen}^2(t) + \cos^2(t) = 1$, entonces, para un ángulo particular, por ejemplo, $t = \pi/4$, puede concluir que $\text{sen}^2(\pi/4) + \cos^2(\pi/4) = 1$. Un ejemplo ilustra el uso apropiado del método por particularización.

- **Definición 16**: Un número real u es una límite superior de un conjunto de números reales T si para todos los elementos t en T, $t \leqslant u$.
- **Ejemplo 7**: Si R es un subconjunto de un conjunto S de números reales y u es un límite superior de S, entonces u es un límite superior de R.

Explicación detallada de la demostración. El método progresivo-regresivo da origen a la pregunta de abstracción "¿Cómo puedo demostrar que un número real (u) es un límite superior para un conjunto de números reales (R)?" La **definición 16** se usa para responder dicha pregunta. Así, se debe demostrar que para todos los elementos r en R, $r \leqslant u$. La presencia del cuantificador "para todo" en el proceso regresivo sugiere proceder con el método por selección, mediante el cual uno escoge un elemento, por ejemplo r, de R, para el cual se debe demostrar que $r \leqslant u$.

Volviendo ahora hacia el proceso progresivo, verá usted cómo el método por particularización se utiliza para obtener la conclusión deseada de que $r \leqslant u$. A partir de la hipótesis de que R es un subconjunto de S, y por la **definición 14**, usted sabe que cada elemento en R está también en S. En el proceso regresivo, usted se encontró el elemento particular r en R y, por lo tanto, puede usted utilizar el método por particularización para concluir que r está en S.

También, a partir de la hipótesis, usted sabe que u es un límite o cota superior para S, y por la **definición 16** esto significa que para todo elemento s en S, $s \leqslant u$. De nuevo, la presencia del cuantificador "para todo" en el proceso progresivo sugiere usar el método para particularización. Observe cómo, en particular, r es un elemento de S

como se demostró en el párrafo anterior. Así, por medio del método por particularización, usted puede concluir que $r \leqslant u$. Debido a que la proposición "$r \leqslant u$" fue la última que se obtuvo en el proceso regresivo, la prueba se considera terminada.

Cuando usted está usando el método por particularización, debe tener mucho cuidado para mantener sus símbolos y notación en orden. También, asegúrese de que el objeto especial al cual se aplica la particularización satisface "aquella" cierta propiedad, ya que solamente así usted podrá concluir entonces que algo sucede.

En la prueba condensada que sigue observe la falta de referencia a los métodos progresivo-regresivo, por selección y por particularización

Demostración del ejemplo 7. Para demostrar que u es un límite superior de R, sea r un elemento de R (la palabra "sea" indica que se ha utilizado el método por selección). Por hipótesis, R es un subconjunto de S y, por lo tanto, r es también un elemento de S (es aquí donde el método por particularización se ha utilizado). Además, por hipótesis, u es un límite superior de S, entonces todos los elementos de S son $\leqslant u$. En particular, r es un elemento de S, por lo que $r \leqslant u$ (nuevamente, el método por particularización se ha utilizado). ||

Este capítulo y los tres anteriores han proporcionado varias técnicas para trabajar con cuantificadores que aparezcan ya sea en A o en B. Como siempre, permita que la forma del enunciado lo guíe. Cuando B tiene el cuantificador "existe", puede utilizarse el método por construcción, para generar el objeto deseado. El método por selección está asociado con el cuantificador "para todo", excepto cuando se supone que la proposición B es verdadera para todo entero, comenzando a partir de alguno en particular; en tal caso, el método por inducción posiblemente tendrá éxito siempre y cuando usted pueda relacionar la proposición para $(n + 1)$ con la proposición para (n). Finalmente, si el cuantificador "para todo" aparece en la proposición A, puede utilizarse el método por particularización. Cuando use el método por particularización, asegúrese de que el objeto particular bajo consideración satisface una propiedad particular porque solamente entonces se puede estar seguro que algo sucederá.

Hasta este momento, todo el material ha sido organizado con respecto al método progresivo-regresivo. Ahora es tiempo de ver algunas de las otras técnicas usadas para demostrar que "A implica B".

EJERCICIOS

Nota: Todas las demostraciones deberán incluir una explicación detallada de la misma, así como una versión condensada.

7.1 Explique la diferencia entre los métodos por particularización y por selección.

7.2 Para cada una de las siguientes proposiciones y objetos dados, ¿qué propiedades debe satisfacer el objeto para poder aplicar el método por particularización? Dado que el objeto satisface las propiedades respectivas, ¿qué puede concluirse acerca del objeto?

a) Proposición: A entero $n \geqslant 5$, $2^n > n^2$

objeto dado: m

b) Proposición: para cada elemento x en el conjunto S con $|x| < 5$, x está en el conjunto T.

Objeto dado: y

c) Proposición: A $\in > 0$, E $\delta > 0 \in$ A y con $|x - y| < \delta$, $|f(x) - f(y)| < \in$ (donde δ, $\in$, x, e y, son números reales y f es una función de una variable).

Objeto dado: $\in'$

d) Proposición: cualquier rectángulo cuya área es 1/2 del cuadrado de una de sus diagonales es un cuadrado.

Objeto dado: el cuadrilátero $QRST$.

e) Proposición: para cualquier ángulo t con $0 < t < \pi/4$, cost $(t) >$ sent (t).

Objeto dado: ángulo S del triángulo RST.

7.3 Demuestre que si R es un subconjunto de S y S es un subconjunto de T, entonces R es un subconjunto de T.

7.4 Demuestre que si S y T son conjuntos convexos (ejercicio 5.1 *e*)), entonces S intersección T es un conjunto convexo.

7.5 Desmuestre que si T es una función convexa de una variable (ejercicio 5.1 *f*)), entonces, para todos los números reales $s \geqslant 0$, la función sf es convexa (donde el valor de la función sf en cualquier punto x es $sf x$)).

7.6 Demuestre que si f es una función convexa de una variable (ejercicio 5.1 *f*)), y y es un número real, entonces, el conjunto $C = \{$número real x: $f(x) \leqslant y\}$ es convexo.

7.7 Demuestre que 1 es un límite mínimo superior del conjunto $S = \{1 - 1/2, 1 - 1/3, 1-1/4, ...\}$ (ejercicio 5.1 *d*)). (*Sugerencia:* el conjunto S se puede escribir como $\{$números reales x: existe un entero $n \geqslant 2$ tal que $x = 1 - 1/n\}$.)

Capítulo 8

El método por contradicción

El método progresivo-regresivo es muy poderoso pero puede suceder que, por alguna razón u otra, usted no pueda completar exitosamente una demostración, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8. Si n es un entero y n^2 es par, entonces n es par.

Explicación detallada de la demostración. El método progresivo-regresivo da origen a la pregunta de abstracción: "¿Cómo puedo demostrar que un entero (n) es par?" Una respuesta es demostrar que existe un entero k tal que $n = 2k$. La presencia del cuantificador "existe" sugiere proceder con el método por construcción y, así, el proceso progresivo se utilizará para generar el entero deseado k.

Al trabajar progresivamente a partir de la hipótesis de que n^2 es par, existe un entero, por ejemplo m, tal que $n^2 = 2m$. Ya que el objetivo es generar un entero k para el cual $n = 2k$, es natural obtener la raíz cuadrada de ambos miembros de la ecuación $n^2 = 2m$ para llegar a $n = \sqrt{2m}$, pero, ¿cómo se puede escribir $2m$ de tal modo que se parezca a $2k$? ¡Tal parece que ha fracasado el método progresivo-regresivo!

Demostración del ejemplo *8.* La técnica que va usted a aprender lo llevará a una demostración sencilla de este problema, lo cual se deja como ejercicio. ||

Afortunadamente, existen otras técnicas que usted podría intentar antes de darse por vencido. En este capítulo, el método por contra-

dicción se describe junto con las indicaciones de cómo y cuándo debe utilizarse.

En el método por contradicción usted comienza suponiendo que *A* es verdadero, tal como en el método progresivo-regresivo. Sin embargo, para obtener la conclusión deseada de que *B* es verdadero, usted procede haciéndose una pregunta muy sencilla que dice: "¿por qué *B* no puede ser falso?" Después de todo, si debemos concluir que *B* es verdadero, entonces debe haber alguna razón por la cual *B* no puede ser falso. El objetivo del método por contradicción es descubrir esta razón. En otras palabras, la idea de una demostración por contradicción es suponer que *A* es verdadero y que *B* es falso, y ver porqué esto no puede suceder. Por ejemplo, suponga que como resultado de suponer que *A* es verdadero y *B* es falso (de aquí en adelante se escribirá *NO B*), usted fuera capaz, de alguna manera, de llegar a la conclusión de que $0 = 1$ ¡?! ¿No le convencería esto de que es imposible que *A* sea verdadero y *B* falso simultáneamente? Así, en una demostración por contradicción usted supone que *A* es verdadero y que *NO B* es verdadero, y de alguna manera debe usted usar esta información para obtener una contradicción a algo que usted sabe de manera absoluta que es verdadero.

Otra manera de ver el método por contradicción es recordar que la proposición "*A* implica *B*" es verdadero en todos los casos excepto cuando *A* es verdadero y *B* es falso. En una demostración por contradicción usted descarta este caso suponiendo que esto sucede y obteniendo, entonces, una contradicción.

En este punto aparecen muchas preguntas muy naturales como:

1. ¿Qué contradicción debería buscar?
2. ¿Cómo usa usted la suposición de que *A* es verdadero y *B* es falso para obtener la contradicción?
3. ¿Cuándo y por qué debería usted usar este método en lugar del método progresivo-regresivo?

La primera pregunta es la más difícil de contestar, ya que no existen líneas de acción específicas. Cada problema proporciona su propia contradicción y, usualmente, se requiere de creatividad, perspicacia, persistencia y suerte para generar una contradicción.

Respecto a la segunda pregunta, uno de los enfoques comunes para encontrar una contradicción es trabajar progresivamente a partir de

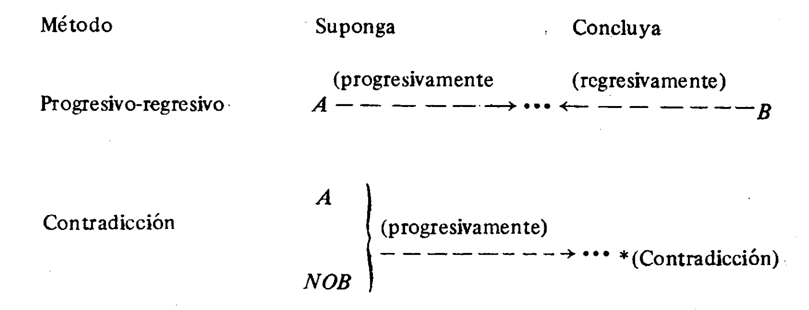


Figura 8 Progresivo-Regresivo contra contradicción.

la suposición de que *A* y *NO B* son verdaderos, como se ilustrará en un momento.

El análisis anterior también indica porqué podría usted preferir el método por contradicción en lugar del método progresivo-regresivo. En el método progresivo-regresivo, sólo supone que *A* es verdadero, mientras que en el método por contradicción usted supone que tanto *A* como *NO B* son verdaderos. Así, en vez de sólo una, usted obtiene dos proposiciones a partir de las cuales puede usted trabajar progresivamente (figura 8). Observe, sin embargo, que no hay manera de determinar de antemano en dónde va a surgir la contradicción.

Como regla general, use el método por contradicción cuando la proposición *NO B* le dé alguna información útil. Existen por lo menos dos casos reconocibles en los cuales el método por contradicción debería tomarse en cuenta. Recuerde la proposición *B* del ejemplo 8: "*n* es un entero par". Debido a que un entero sólo puede ser par o impar, cuando usted supone que *B* no es verdadero, es decir, que *n* no es un entero par, entonces se debe concluir que *n* es un entero impar. Aquí la proposición *NO B* le ha dado a usted algo de información útil. En general, cuando la proposición *B* es uno de dos casos posibles (como en el ejemplo 8), es probable que el método por contradicción sea efectivo debido a que al suponer *NO B*, usted sabrá que el otro caso debe suceder, y eso debería ayudarle a obtener una contradicción.

Un segundo caso en el cual es probable que el método por contradicción tenga éxito es cuando *B* contiene la palabra "no", como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 9. Si r es un número real tal que $r^2 = 2$, entonces r es irracional.

Explicación detallada de la demostración. Es importante notar que la conclusión del ejemplo 9 se puede escribir de modo que se lea: "r no es racional", y de esta manera, la presencia de la palabra "no" sugiere ahora el método por contradicción, mediante el cual usted puede suponer que A y *NO* B son verdaderos. En este caso, significa que usted puede suponer que $r^2 = 2$ y que r es un número racional. Ahora se debería poder obtener una contradicción.

Trabajando progresivamente y usando la **definición 7** para un número racional, existen enteros p y q con $q \neq 0$ tales que $r = p/q$. Aún no se tiene la respuesta a la pregunta acerca de dónde aparece la contradicción, y esto requiere de mucha creatividad. Aquí, una observación crucial ayudará realmente. Es posible suponer que p y q no tienen común divisor (es decir, ningún entero divide a p y q), ya que si lo tuvieran, usted podría dividir el numerador p y el denominador q entre este número. Ahora se puede obtener una contradicción demostrando que 2 es un común divisor de p y q. Esto, a su vez, se obtendrá demostrando que p y q son pares y, por lo tanto, 2 divide a ambos.

Trabajando progresivamente, ya que $r = p/q$ se obtiene entonces que $r^2 = p^2/q^2$. Pero por la hipótesis usted también sabe que $r^2 = 2$, así que $2 = p^2/q^2$. El resto del proceso progresivo es llegar a $2 = p^2/q^2$ mediante operaciones algebraicas para obtener la conclusión de que p y q son enteros pares. Específicamente, al multiplicar ambos lados de esta ecuación por q^2 se obtiene $2q^2 = p^2$. Recuerde que usted está tratando de concluir que p y q son pares. A partir de $2q^2 = p^2$, usted puede decir que $2q^2$ es par, no importa qué clase de entero sea q, y como $p^2 = 2q^2$, p^2 también debe ser par.

Continuando el proceso progresivo, ¿qué información útil se puede derivar del hecho de que p^2 es par? Pues bien, la única forma en la que un entero p multiplicado por sí mismo es par, es que p sea par, y ésta era la conclusión deseada. Recuerde, una vez más, que una demostración es un argumento convincente, y puede ser que esta última oración no lo haya convencido de que p es par. En este caso sería necesario dar más detalles. Como siempre, una demostración debe escribirse tomando en cuenta a las personas a quienes está dirigida. Si usted necesita convencerse de que p es par, vea el ejemplo 8.

Mientras tanto, aún es necesario demostrar que también q es par. Continuando con el proceso progresivo, dado que p es par, por la definición alternativa de un entero par, existe un entero k tal que $p = 2k$. Ahora, ya que $2q^2 = p^2$ se sigue $2q^2 = (2k)^2 = 4k^2$, lo cual

dice que $q^2 = 2k^2$. Nuevamente, $2k^2$ es par no importa qué tipo de entero es k, y ya que $q^2 = 2k^2$, q^2 es par. Finalmente, observe que la única manera en la cual un entero q multiplicado por sí mismo es par, es que q sea par (ejemplo 8). Entonces, p y q son pares y la contradicción deseada ha sido alcanzada.

Demostración del ejemplo 9. Suponga que r es un número racional de la forma p/q (con p, q enteros y $q \neq 0$) y que $r^2 = 2$. Además, se puede suponer que p y q no tienen común divisor, ya que si lo tuvieran éste se cancelaría tanto del numerador p, como del denominador q. Ya que $r^2 = 2$ y $r = p/q$ se sigue que, $2 = p^2/q^2$, o que es lo mismo, $2q^2 = p^2$. Observando que $2q^2$ es par, p^2 y, por lo tanto, p deben ser pares. Consecuentemente, existe un entero k tal que $p = 2k$. Sustituyendo este valor para p, se obtiene $2q^2 = p^2 = (2k)^2 = 4k^2$, o $q^2 = 2k^2$. De aquí, se concluye entonces que q^2 es par y, por lo tanto, q debe ser par. Así se ha demostrado que p y q son pares, y tienen como común divisor 2. Esta contradicción establece lo afirmado anteriormente.||

Esta demostración fue descubierta en la antigüedad por un seguidor de Pitágoras, y ejemplifica el uso de la contradicción. ¡Trate de demostrar la proposición por algún otro método!

Existen otros usos valiosos para el método por contradicción. Recuerde que cuando la proposición *B* contiene el cuantificador "existe", se recomienda el método por construcción a pesar de la dificultad de tener que generar el objeto deseado. El uso del método por contradicción permite un enfoque totalmente nuevo. En vez de mostrar que existe un objeto con una cierta propiedad tal que algo sucede, ¿por qué no partir de la suposición de que dicho objeto no existe? Su tarea consiste ahora en utilizar esta información para lograr alguna clase de contradicción. Lo que no es muy claro es cómo y dónde surge la contradicción, pero tal vez esto sea mucho más fácil que tener que generar o construir el objeto. Considere el siguiente ejemplo.

Imagine que usted quiere demostrar que hay por lo menos dos personas en el mundo que tienen exactamente el mismo número de cabellos en la cabeza. Si usted decidiera utilzar el método por construcción, entonces usted tendría que encontrar dos personas con el mismo número de cabellos. Para ahorrarse tiempo, usted podría utilizar el método por contradicción. Haciéndolo así, usted puede suponer que no hay personas que tienen el mismo número de cabellos en

la cabeza, o, que equivale a lo mismo, que cada quien tiene un número diferente de cabellos en la cabeza. Ahora, asigne números a las personas de tal manera que la persona con el menor número de cabellos reciba el número 1, la persona siguiente reciba el número 2 y así sucesivamente. Recuerde que se supone que cada persona tiene un número diferente de cabellos. Entonces, la persona número dos debe tener al menos un cabello más que la persona número 1 y así sucesivamente. Consecuentemente, ¡la persona cuyo número es un billón debe tener por lo menos un billón de cabellos más que la persona cuyo número es 1! Claramente, ninguna persona puede tener un billón de cabellos más que cualquier otra persona, así se ha establecido una contradicción.

Este ejemplo ilustra una diferencia sutil, pero significativa entre una demostración utilizando el método por construcción y otra que utiliza el método por contradicción. Si usted tiene éxito con el método por construcción, habrá generado el objeto deseado, o por lo menos habrá indicado cómo se puede producir este objeto, tal vez con la ayuda de una computadora. Por otro lado, si usted estableciera el mismo resultado por contradicción, sabrá que el objeto existe sin haber tenido que construirlo físicamente. Por esta razón, sucede a menudo que las demostraciones hechas por contradicción son mucho más cortas y fáciles que aquellas hechas por construcción, debido a que usted no se tiene que crear el objeto deseado; usted sólo tiene que mostrar que su inexistencia es imposible. Esta diferencia ha conducido a grandes debates filosóficos en matemáticas. Además, un área activa de investigación actual consiste en encontrar demostraciones por construcción en problemas donde previamente se conocían sólo demostraciones por contradicción.

Como usted ha visto, el método por contradicción puede ser una técnica muy útil cuando la proposición B contiene la palabra "no". Trabajará progresivamente partiendo de la suposición de que A y *NO* B son verdaderos para llegar a una contradicción. Una de las desventajas del método es que usted no sabe exactamente cuál va a ser la contradicción que va a alcanzar. El siguiente capítulo describe una técnica para hacer demostraciones en la cual usted intenta alcanzar una contradicción muy específica. De esta manera usted tendrá una guía, dado que sabrá de antemano qué contradicción está buscando.

EJERCICIOS

Nota: todas las demostraciones deberán contener una explicación detallada de la misma así como una versión condensada.

8.1 ¿Qué debería usted suponer cuando se aplique el método por contradicción a las siguientes proposiciones?

a) Si ℓ, m y n son tres enteros consecutivos, entonces 24 no divide a $\ell^2 + m^2 + n^2 + 1$.
b) Si la matriz M no es singular, entonces los renglones de M no son linealmente dependientes.
c) Si f y g son dos funciones tales que 1) $g \geqslant f$ y 2 f no está acotada superiormente, entonces g no está acotada superiormente.

8.2 Escriba cada uno de los siguientes enunciados de forma tal que la palabra "no" aparezca explícitamente.

a) Existe un número infinito de números primos.
b) El conjunto S de números reales es no acotado.
c) Los únicos enteros positivos que dividen al entero positivo p son 1 y p.
d) Las líneas rectas ℓ y ℓ' son paralelas.
d) El número real x es menor que 5.

8.3 Demuestre por contradicción que si n es un entero y n^2 es par, entonces n es par.
8.4 Demuestre por contradicción que ninguna cuerda de un círculo es mayor que un diámetro.
8.5 Demuestre por contradicción que si ℓ_1 y ℓ_2 son dos líneas rectas en un plano, las cuales son perpendiculares a una tercera línea recta ℓ en el plano, entonces ℓ_1 y ℓ_2 son paralelas.
8.6 Demuestre por contradicción que en una fiesta de n personas ($n \geqslant 2$), existen por lo menos dos personas que tienen el mismo número de amigos en la fiesta.
8.7 Demuestre por contradicción que no existen tres enteros positivos consecutivos, tales que el cubo del mayor sea igual a la suma de los cubos de los otros dos.

8.8 Demuestre por contradicción que hay un número infinito de números primos. (Sugerencia: suponga que n es el mayor número primo. Luego, considere cualquier número primo p el cual divide a $n! + 1$. ¿Cómo está relacionado p con n?).

8.9 Para cada uno de las siguientes proposiciones, indique cuál técnica utilizaría para hacer demostraciones y en qué orden. Específicamente, establezca qué supondría y qué trataría de concluir. (*Nota:* S y T son conjuntos de números reales y todas las variables se refieren a números reales).

a) $\exists x \in S \ni s \in T.$

b) $\forall s$ en S, $\nexists$ t en T tal que $s > t$.

c) No existe un número $M > 0$ tal que para todo x en S, $|x| < M$.

Capítulo 9

El método contrapositivo

En el capítulo anterior se describió el método por contradicción en el cual usted trabaja progresivamente a partir de dos postulados *A* y *NO B* para lograr algún tipo de contradicción. En general, la dificultad con este método es que usted no sabe de antemano qué contradicción va a obtener. Como se verá en este capítulo, ***el método contrapositivo*** tiene la ventaja de que lo dirige a usted hacia un tipo específico de contradicción.

El método contrapositivo es similar al de contradicción en que usted empieza por suponer que *A* y *NO B* son verdaderos. Sin embargo, la diferencia consiste en que en el método contrapositivo, usted no trabaja progresivamente desde *A* y *NO B*. En vez de eso, usted trabaja progresivamente solamente desde *NO B*. Su objetivo es lograr la contradicción de que *A* es falso (denotado como *NO A*). ¿Puede usted pedir una mejor contradicción que esa? ¿Cómo puede ser que *A* sea falso y verdadero al mismo tiempo?

Nuevamente, en el método contrapositivo usted supone que *A* y *NO B* son verdaderos y trabaja progresivamente partiendo de la proposición *NO B* hasta lograr la contradicción de que *A* es falso. Como tal, el método contrapositivo puede verse como una forma "pasiva" del método por contradicción en el sentido de que la suposición de que *A* es verdadero proporciona pasivamente la contradicción. Sin embargo, en el método por contradicción, la suposición de que *A* es verdadero se utiliza activamente para lograr la contradicción (figura 9).

En la figura 9 usted puede ver también las ventajas y desventajas del método contrapositivo comparado con el método por contradicción. La desventaja del método contrapositivo es que usted trabaja progresivamente partiendo solamente desde una proposición (*NO B*) en vez de dos. Por otro lado, la ventaja es que sabe precisamente lo que está buscando (*NO A*). Como tal, puede aplicar con frecuencia el proceso de abstracción a la proposición *NO A* intentando trabajar regresivamente. La opción de trabajar regresivamente no existe en el método por contradicción, dado que usted no sabe qué contradicción está buscando.

Método	Suponga		Concluya
	A		
Contrapositivo	*NO B*	(progresivamente) ----→ · · · · ←---- (regresivamente)	*NO A*
Contradicción	*A*, *NO B*	(progresivamente) ----→ · · · ·	*(contradicción)

Figura 9 Contrapositivo contra por contradicción

El siguiente ejemplo muestra el método contrapositivo.

Ejemplo 10: Si p y q son números reales positivos tal que $\sqrt{pq}$ no es igual a $(p + q)/2$, entonces p no es igual a q.

Explicación detallada de la demostración. La presencia de la palabra "no" en la conclusión sugiere utilizar el método por contradicción o el método contrapositivo. Aquí, se utilizará el método contrapositivo basado en el cual usted trabajará progresivamente a partir de la proposición *NO B* y regresivamente a partir del postulado *NO A*. En este caso, *NO B* es la proposición "$p = q$" mientras que *NO A* es "$\sqrt{pq} = (p + q)/2$". El objetivo es trabajar progresivamente partiendo del hecho de que $p = q$ para alcanzar la conclusión que se desea, es decir, $\sqrt{pq} = (p + q)/2$. Tráte de hacerlo usted mismo.

Puesto que usted quiere concluir que $\sqrt{pq} = (p + q)/2$ y está suponiendo que $p = q$, ¿por qué no poner p en lugar de q? En otras pa-

labras, puesto que $p = q, \sqrt{pq} = \sqrt{pp} = p$ y, también, $(p + q)/2 = (p + p/2 = (2p)/2 = p$. Entonces, trabajando progresivamente y partiendo de la suposición de que $p = q$, es fácil ver que $\sqrt{pq} = (p + q)/2 = p$. Nótese que se utilizó la suposición de que $p > 0$ cuando se estableció que $\sqrt{pp} = p$.

En la versión condensada de la demostración, la cual se muestra a continuación, observe que en ninguna parte de la demostración se dice formalmente que la proposición *NO A* ha sido alcanzada.

Demostración del ejemplo 10. Suponga por el contrario que $p = q$. Dado que p es positivo, se sigue que

$$\sqrt{pq} = \sqrt{pp} = p = (p + p)/2 = (p + q)/2$$

y la demostración termina.

Es también interesante comparar los métodos contrapositivo y progresivo-regresivo. En el método progresivo-regresivo usted trabaja progresivamente partiendo de *A* y regresivamente partiendo de *B*, mientras que en método contrapositivo, usted trabaja progresivamente partiendo de *NO B* y regresivamente partiendo de *NO A* (figura 10).

Si comprende la figura 10, no es muy difícil de ver porqué el método contrapositivo puede ser mejor que el método progresivo-regresivo. Puede ser que obtenga información más útil trabajando *NO B* progresivamente en vez de A. También, pudiera ser más fácil realizar el proceso de abstracción en la proposición *NO A* que en *B*, como se haría en el método progresivo-regresivo.

Método	Suponga		Concluya
		(progresivamente)	(regresivamente)
Progresivo-regresivo	*A*	- - - - - ► · · · · · · ◄ - - - - -	*B*
	A		
Contrapositivo			
		(progresivamente)	(regresivamente)
	NO B	- - - - - ► · · · · · · ◄ - - - - -	*NO A*

Figura 10 Progresivo regresivo contra contrapositivo

El método progresivo-regresivo surgió de considerar lo que le sucede a la verdad de "*A* implica *B*" cuando *A* es verdadero y cuando

A es falso (recuerde tabla 1). El método contrapositivo surge de consideraciones similares sobre *B*. Específicamente, si *B* es verdadero, entonces, de acuerdo a la tabla 1, la proposición "*A* implica *B*" es verdadero. Por consiguiente, no hay necesidad de considerar el caso cuando *B* es verdadero. Así que suponga que *B* es falso. Para asegurar que "A implica *B*" es verdadero, de acuerdo a la tabla 1, usted tendría que demostrar que *A* es falso. Entonces, el método contrapositivo le permite suponer que *B* es falso para tratar de concluir que *A* es falso.

Es cierto que la proposición "*A* implica *B*" es lógicamente equivalente a "*NO B* implica *NO A*" (ver tabla 3). Como tal, el método contrapositivo puede considerarse como el método progresivo-regresivo aplicado a la proposición "*NO B* implica *NO A*". La mayoría de las demostraciones condensadas que utilizan el método contrapositivo hacen poca o ninguna referencia al método por contradicción.

En general, es difícil saber cuál será más efectivo entre el método progresivo-regresivo, por contradicción o el contrapositivo para un problema dado sin haberlos intentado antes. Sin embargo, hay un caso que indica frecuentemente que el método por contradicción o el contrapositivo debe seleccionarse o, al menos, considerarse seriamente. Esto ocurre cuando la proposición *B* contiene la palabra "no" puesto que en ese caso, es usual encontrar que la proposición *NO B* contiene cierta información útil.

En el método por contradicción, usted trabaja progresivamente a partir de las dos proposiciones *A* y *NO B* para obtener una contradicción. En el método contrapositivo, también llega a una contradicción, pero lo hace trabajando progresivamente desde *NO B* para llegar a la conclusión *NO A*. Por supuesto, usted puede trabajar regresivamente desde *NO A*. Se da una comparación de los métodos progresivo-regresivo, por contradicción y contrapositivo en la figura 11.

Método	Suponga		Concluya
Progresivo-regresivo	*A*	(progresivamente) ----------►· · · · · · · · ·◄---------	(regresivamente) *B*
Contradicción	*A* *NO B*	(progresivamente) ----------►· · · · · · · · ·	*(contradicción)
Contrapositivo	*A* *NO B*	(progresivamente) ----------►· · · · · · · · ·◄---------	(regresivamente) *NO A*

Figura 11 Progresivo regresivo contra contradicción contra contrapositivo.

Los métodos contrapositivo y por constradicción necesitan que usted sea capaz de escribir la negación de una proposición. El siguiente capítulo demuestra cómo hacerlo cuando la proposición de interés contiene cuantificadores.

EJERCICIOS

Nota: Todas las demostraciones deberán contener una explicación detallada de la misma, así como una versión condensada.

9.1 Si se va a utilizar el método contrapositivo en las siguientes proposiciones, ¿a partir de cuál(es) trabajaría usted progresivamente y qué proposición sería su conclusión?

a) Si n es un entero para el cual n^2 es par, entonces n es par.
b) Suponga que S es un subconjunto del conjunto T de números reales. Si S es no acotado, entonces T es no acotado.
c) Si x y y son números reales con $x \neq y$ entonces $f(x) \neq f(y)$ (donde f es una función de una variable).
d) Si la matriz M no es singular, entonces los renglones de M no son linealmente dependientes.

9.2 Al demostrar la proposición "Si r es un número real tal que $r > 1$, entonces no existe un real t entre 0 y $\pi/4$ tal que sen $(t) = r \cos(t)$". Cuando se usa el método contrapositivo, ¿cuáles de los siguientes enunciados surgen como resultado del proceso progresivo?

a) $r - 1 \leqslant 0$
b) $\text{sen}^2(t) = r^2(1 - \text{sen}^2(t))$
c) $1 - r < 0$
d) $\tan(t) = 1/r$

9.3 Si el método contrapositivo se utiliza para demostrar la proposición: "Si la derivada de la función f en el punto x no es igual a cero, entonces x no es un mínimo relativo de f", entonces ¿cuál de las siguientes es la pregunta de abstracción correcta? ¿Qué es incorrecto en las otras laternativas?

a) ¿Cómo puedo demostrar que el punto x es un mínimo relativo de la función f?

b) ¿Cómo puedo demostrar que la derivada de la función en el punto x es cero?
c) ¿Cómo puedo demostrar que un punto es un mínimo relativo de una función?
d) ¿Cómo puedo demostrar que la derivada de una función en un punto es cero?

9.4 Demuestre que si c es un entero impar, entonces la solución de la ecuación $n^2 + n - c = 0$, no es un entero impar.

9.5 Suponga que m y b son números reales con $m \neq 0$ y sea f la función definida por $f(x) \angle mx + b$. Demuestre que para todo

$$x \neq y, f(x) \neq f(y).$$

9.6 Demuestre utilizando el método contrapositivo que si ningún ángulo del cuadrilátero *RSTU* es obtuso, entonces el cuadrilátero *RSTU* es un rectángulo.

Capítulo 10

La negación de negaciones conduce a confusiones

Como usted vio en el capítulo anterior, el método contrapositivo es una técnica para hacer demostraciones muy valiosa. Sin embargo, para usarla debe ser capaz de escribir la proposición *NO B* de manera que pueda trabajar con ella progresivamente. De igual manera, usted tiene que conocer exactamente la proposición *NO A* para que pueda aplicar el proceso de abstracción. En algunos casos, es fácil de encontrar la negación de una proposición. Por ejemplo, si A es la proposición "el número real x es > 0", entonces *NO A* es "no es cierto que el número real x es > 0", o equivalentemente, "el número real x no es > 0". De hecho, la palabra "no" puede eliminarse completamente mediante su incorporación a la proposición para obtener "el número real x es $\leqslant 0$".

Una situación con mayor dificultad surge cuando la proposición contiene cuantificadores. Por ejemplo, suponga que B contiene el cuantificador "para todo" en la forma usual:

> Para todos los "objetos" con una "cierta propiedad", "algo sucede".

Entonces *NO B* es la proposición:

> No es cierto que para todos los "objetos" con aquella "cierta propiedad", "algo sucede"

lo cual realmente significa que existe un objeto con una propiedad para el cual el algo no sucede.
Similarmente, si la proposición *B* contiene el cuantificador "existe" en la forma usual:

> Existe un "objeto" con "cierta propiedad" tal que "algo sucede",

entonces *NO B* es la proposición:

> No es cierto que exista un "objeto" con una "cierta propiedad" para el que "algo sucede",

o, en otras palabras, para todos los objetos con cierta propiedad, algo no sucede.

En general, existen tres pasos muy sencillos para encontrar la negación de una proposición que contiene cuantificadores:

> **Primer paso**: ponga la palabra NO enfrente de la proposición
> **Segundo paso**: si la palabra NO aparece a la izquierda de un cuantificador, muévala hacia la derecha del cuantificador y póngala exactamente antes del algo que sucede. Cuando hace esto, usted cambia mágicamente el cuantificador por su opuesto, de manera que "para todo" se convierte en "existe" y "existe" se convierte en "para todo".
> **Tercer paso**: cuando todos los cuantificadores aparezcan a la izquierda de la palabra NO, elimine el NO incorporándolo en la proposición que aparece inmediatamente a su derecha.

Estos pasos se ilustrarán en los siguientes ejemplos:

1. Para todo número real $x \geqslant 2$, $(x^2 + x - 6) \geqslant 0$.

   Primer paso: NO para todo número real $x \geqslant 2$, $(x^2 + x - 6) \geqslant 0$.
   Segundo paso: existe un número real $x \geqslant 2$ tal que NO
   $$(x^2 + x - 6) \geqslant 0.$$
   Tercer paso: existe un número real $x \geqslant 2$ tal que
   $$(x^2 + x - 6) < 0.$$

Observe que, en el paso 2, cuando el NO se pasa de izquierda a derecha, el cuantificador cambia pero la propiedad $(x \geqslant 2)$ ¡no cam-

bia! También, dado que se cambia el cuantificador "para todo" a "existe", es necesario cambiar la "," por las palabras "tal que". De manera completamente análoga, si el cuantificador "existe" se cambia a "para todo", las palabras "tal que" se eliminan y se inserta, una "," como se ilustra en el siguiente ejemplo:

2. Existe un número real $x \geqslant 2$ tal que $(x^2 + x - 6) \geqslant 0$.
   Primer paso: NO existe un número real $x \geqslant 2$ tal que $(x^2 + x - 6) \geqslant 0$.
   Segundo paso: para todos los números reales $x \geqslant 2$, NO $(x^2 + x - 6) \geqslant 0$.
   Tercer paso: para todos los números reales $x \geqslant 2$, $(x^2 + x - 6) < 0$.

Finalmente, si la proposición original contiene más de un cuantificador, el segundo paso tendrá que repetirse hasta que todos los cuantificadores aparezcan a la izquierda de la palabra NO, como se muestra en los siguientes:

3. Para todo número real x entre -1 y 1, existe un número real y entre -1 y 1 tal que $(x^2 + y^2) \leqslant 1$.

   Primer paso: NO para todo número real x entre -1 y 1, existe un número real y entre -1 y 1 tal que $(x^2 + y^2) \leqslant 1$.
   Segundo paso: Existe un número real x entre -1 y 1 tal que NO existe un número real y entre -1 y 1 tal que $(x^2 + y^2) \leqslant 1$.
   Segundo paso: existe un número real x entre -1 y 1 tal que para todos los números reales y entre -1 y 1, NO $(x^2 + y^2) \leqslant 1$.
   Tercer paso: existe un número real x entre -1 y 1 tal que para todos los números reales y entre -1 y 1, $(x^2 + y^2) > 1$.

4. Existe un número real x entre -1 y 1 tal que para todos los números reales y entre -1 y 1, $(x^2 + y^2) \leqslant 1$.

   Primer paso: No existe un número real x entre -1 y 1 tal que para todos los números reales y entre -1 y 1, $(x^2 + y^2) \leqslant 1$.
   Segundo paso: para todos los números reales entre -1 y 1, NO para todos los números reales y entre -1 y 1, $(x^2 + y^2) \leqslant 1$.

Segundo paso: para todos los números reales x entre -1 y 1, existe un número real y entre -1 y 1 tal que NO $(x^2 + y^2) \leqslant 1$.
Tercer paso: para todos los números reales x entre -1 y 1, existe un número real y entre -1 y 1 tal que $(x^2 + y^2) > 1$.

Otra situación donde usted debe ser cuidadoso es en la negación de la proposición que contiene las palabras Y u O. Así como los cuantificadores se intercambian cuando se hace la negación de proposiciones, así también se intercambian la palabra Y y la palabra O. Específicamente, NO [A y B] se convierte en [*NO* A] O [*NO* B]. De igual manera, NO [A O B] se convierte en [*NO* A] Y [*NO* B]. Por ejemplo:

5. NO [$x \geqslant 3$ Y $y < 2$] se convierte en [$x < 3$] O [$y \geqslant 2$].
6. NO [$x \geqslant 3$ O $y < 2$] se convierte en [$x < 3$] Y [$y \geqslant 2$].

Con un poco de práctica usted llegará a ser eficiente en estas transformaciones. Recuerde que cuando usted usa el método contrapositivo de demostración, lo primero que debe hacer es escribir las proposiciones *NO B* y *NO A*.

EJERCICIOS

Nota: todas las demostraciones deberán contener una explicación detallada de la misma así como una versión condensada.

10.1 Escriba la negación de cada una de las definiciones del ejercicio 5.1. Por ejemplo, 5.1 *a*) se leería "El número real x^* no es un máximo de la función f si existe un número real x tal que $f(x) > f(x^*)$".

10.2 Escriba las siguientes proposiciones de forma tal que la palabra "no" aparezca explícitamente. Por ejemplo, la proposición "$x > 0$" puede pasarse a "x no es $\leqslant 0$".

a) Para cada elemento x en el conjunto S, x está en T.
b) Existe un ángulo t entre 0 y $\pi/2$ tal que sen (t) = cos (t).
c) Para cada "objeto" con una "cierta propiedad", "algo sucede".

d) Existe un "objeto" con una "cierta propiedad" tal que "algo sucede".

10.3 Si se utiliza el método por contradicción para demostrar las siguientes proposiciones, ¿que debería uste suponer?

a) Para cada entero $n \geqslant 4$, $n! > n^2$.
b) A implica (B O C).
c) A implica (B Y C).
d) Si f es una función convexa de una variable, x^* es un número real y existe un número real $\delta >$ tal que para todo número real x con la propiedad $|x - x^*| < \delta$, $f(x) \geqslant f(x^*)$, entonces para todo número real y, $f(y) \geqslant f(x^*)$.

10.4 Si el método contrapositivo se utiliza para demostrar las siguientes proposiciones, ¿a partir de cuál(es) proposición(es) trabajaría progresivamente, y *a* partir de cuál(es) (*s*) trabajaría regresivamente?

a) A implica (B O C).
b) A implica (B Y C).
c) Si n es un entero par y m es un entero impar, entonces mn divisible entre 4 o n no es divisible entre 4.

10.5 Demuestre por contradicción que si x y y son números reales tales que $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ y $x + y = 0$, entonces $x = 0$ y $y = 0$.

Capítulo 11

Técnicas especiales para hacer demostraciones

Ahora usted dispone de tres técnicas principales para tratar de demostrar que "A implica B": los métodos progresivo-regresivo, contrapositivo y por contradicción. Además, cuando B tiene cuantificadores, usted dispone de los métodos por construcción y por selección. Existen otras formas especiales de B para las cuales se tienen también técnicas bien establecidas con las cuales se tiene éxito. Tres de estas técnicas se desarrollarán en este capítulo.

La primera se conoce como *el método de unicidad* y está relacionado con una proposición B, el cual no solamente requiere que usted demuestre la existencia de un objeto con una cierta propiedad tal que algo sucede, sino también que el objeto es único, es decir, no hay otro objeto. Usted sabrá que tiene que utilizar el método de unicidad cuando la proposición B contiene la palabra "único" así como el cuantificador "existe".

En tal caso, su primer paso es demostrar que el objeto deseado existe. Esto puede hacerse mediante el método por construcción o por el de contradicción. El siguiente paso será demostrar la unicidad en alguna de las dos formas comunes. En la primera, usted supone que existen dos objetos con cierta propiedad para los cuales algo sucede. Entonces, usando esa cierta propiedad, lo que sucede y, por supuesto, la información en A, usted debe concluir que los dos objetos son uno sólo y el mismo (es decir, son iguales). El método progresivo-regresivo es por lo común la mejor forma para demostrar que son iguales. El proceso se ilustra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 11. Demuestre que si a, b, c, d, e y f son números reales tal que $(ad - bc) \neq 0$, entonces existen números reales únicos x y y tal que $(ax + by) = e$ y $(cx + dy) = f$.

Explicación detallada de la demostración. La existencia de los números reales x y y se estableció en el ejemplo 4 mediante el método por construcción. Aquí la unicidad se establecerá por el método descrito anteriormente. Suponga que (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos objetos con una propiedad particular para los cuales algo sucede. Entonces, $a(x_1) + b(y_1) = e, c(x_1) + d(y_1) = f$ y, también, $a(x_2) + b(x_2) = e, c(x_2) + d(y_2) = f$. Usando estas cuatro ecuaciones y la suposición de que A es verdadero, se demostrará por medio del método progresivo-regresivo que los dos objetos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son iguales. Específicamente, la pregunta de abstracción es "¿Cómo puedo demostrar que dos pares de números reales $((x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2))$ son iguales?" Usando la definición de igualdad de pares ordenados (**definición 4**), una de las respuestas es demostrar que $x_1 = x_2$ y $y_1 = y_2$, o equivalentemente, que $(x_1 - x_2) = 0$ y $(y_1 - y_2) = 0$. Ambas proposiciones se obtienen en el proceso progresivo realizando operaciones algebraicas en las cuatro ecuaciones y usando la hipótesis de que $(ad - bc) \neq 0$.

Demostración del ejemplo 11. La existencia de los números reales x y y se estableció en el ejemplo 4 mediante el método por construcción. Por consiguiente, únicamente se demostrará la existencia de la unicidad. Para este fin, suponga que (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son números reales que satisfacen:

1. $a(x_1) + b(y_1) = e$
2. $c(x_1) + d(y_1) = f$
3. $a(x_2) + b(y_2) = e$
4. $c(x_2) + d(y_2) = f$

Restando 3 de 1 y 4 de 2 se obtiene:

$[a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2)] = 0$ y
$[c(x_1 - x_2) + d(y_1 - y_2)] = 0.$

Al multiplicar la primera de estas ecuaciones por d y la segunda por b y luego, restando la segunda de la primera, uno obtiene $[(ad - bc)(x_1 - x_2)] = 0$. De la hipótesis de que $(ad - bc) \neq 0$, se tiene que

$(x_1 - x_2) = 0$ y, por consiguiente, $x_1 = x_2$. Una secuencia similar de operaciones algebraicas establecerá que $y_1 = y_2$ y así, queda demostrada la unicidad. ||

El segundo método para demostrar la unicidad le permite suponer que existen dos objetos diferentes con una cierta propiedad y para los cuales algo sucede. Pero, supuestamente, esto no puede suceder, entonces, usando "aquella" cierta propiedad, lo que sucede, la información en A y, específicamente, el hecho de que los objetos sean diferentes, usted debe llegar a una contradicción. Este proceso se demuestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 12: Si r es un número real positivo entonces existe un único número real x tal que $x^3 = r$.

Explicación detallada de la demostración. La presencia del cuantificador "existe" en la conclusión sugiere que se podría utilizar el método por construcción para producir un número real x tal que $x^3 = r$. Esta parte de la demostración se omitirá para enfatizar la demostración de la unicidad. Con esta finalidad, suponga que x y y son dos números reales diferentes tal que $x^3 = r$ $y^3 = r$. Usando esta información junto con la hipótesis de que r es positivo y, especialmente, el hecho de que $x \neq y$, se obtendrá una contradicción demostrando que $r = 0$, contradiciendo así la hipótesis de que r es positivo.

Para demostrar que $r = 0$, se trabaja progresivamente. En particular, ya que $x^3 = r$ y $y^3 = r$, se deduce que $x^3 = y^3$. Entonces, $(x^3 - y^3) = 0$, y factorizando, $[(x - y)(x^2 + xy + y^2)] = 0$.

Aquí es donde usted puede usar el hecho de que $x \neq y$ para dividir entre $(x - y)$, y obteniendo $(x^2 + xy + y^2) = 0$. Considerando ésta como una ecuación cuadrática de la forma $(ax^2 + bx + c) = 0$, en la cual $a = 1$, $b = y$, $c = y^2$, la fórmula para las ecuaciones de 2o. grado establece que

$$x = \frac{-y \pm \sqrt{(y^2 - 4y^2)}}{2} = \frac{-y \pm \sqrt{-3y^2}}{2}$$

Como x es un número real y la fórmula para x requiere obtener la raíz cuadrada de $-3y^2$, entonces, $y = 0$, y si $y = 0$, entonces $r = y^3 = 0$, y se ha obtenido la contradicción.

Demostración del ejemplo 12. Solamente se demostrará la unicidad. Con esta finalidad, suponga que x y y son dos números reales diferentes para los cuales $x^3 = r$ y $y^3 = r$. Por consiguiente, $0 = (x^3 - y^3) = [(x - y)(x^2 + xy + y^2)]$. Dado que $x \neq y$, entonces $(x^2 + xy + y^2) = 0$. De la fórmula cuadrática se deduce que:

$$x = \frac{-y \pm \sqrt{(y^2 - 4y^2)}}{2} = \frac{-y \pm \sqrt{-3y^2}}{2}$$

Puesto que x es un número real $y = 0$, pero entonces $r = y^3 = 0$, contradiciendo así hipótesis que r es positivo.‖

Otra técnica especial para hacer demostraciones, es el método de *la o exclusiva* surge cuando B es de la forma "C o D es verdadero pero no ambas" (donde C y D son proposiciones)(**definición 10**). En otras palabras, el método de la o exclusiva debe utilizarse cuando se quiere demostrar que la preposición "A implica C o D" es verdadera. Aplicando el método progresivo-regresivo, usted empezaría por suponer que A es verdadera y quisiera concluir que C es verdadera o que D es verdadera. Suponga que hace la suposición adicional de que C no es verdadera. Claramente, en este caso lo mejor sería que D fuera verdadero. Así, en el método de la o *exclusiva*, usted supone que A es verdadero, y C es falso, y debe concluir entonces que D es verdadero, como se ilustra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 13. Si $(x^2 - 5x + 6) \geqslant 0$, entonces $x \leqslant 2$ o $x \geqslant 3$.

Explicación detallada de la demostración. Del análisis anterior, usted supone que $(x^2 - 5x + 6) \geqslant 0$ y $x > 2$. Su trabajo es concluir que $x \geqslant 3$. Trabajando progresivamente desde la suposición $(x^2 - 5x + 6) \geqslant 0$, se deduce que $[(x - 2)(x - 3)] \geqslant 0$. Dado que $x > 2$, $(x - 2) > 0$ y, por consiguiente, $(x - 3) \geqslant 0$, y, entonces $x \geqslant 3$, como se desea.

Demostración del ejemplo 13. Suponga que $(x^2 - 5x + 6) \geqslant 0$ y $x > 2$. Se deduce que $[(x - 2)(x - 3)] \geqslant 0$ y dado que $(x - 2) > 0$, entonces $x \geqslant 3$ como se desea.‖

Vale la pena mencionar que el método de la o exclusiva bien podría haberse aplicado igualmente suponiendo que A fuera verdadera y D es falsa, para concluir que C es verdadero. Trate de usar este enfoque en el ejemplo 13.

La última técnica para hacer demostraciones que se desarrollará en este capítulo es el *método máx/mín,* el cual surge en problemas que tratan con máximos y mínimos. Suponga que S es un conjunto no vacío de números reales el cual contiene tanto al mayor como al menor elemento. Para un número real dado x, usted podría estar interesado en la posición del conjunto S con respecto al número x. Por ejemplo, usted podría estar interesado en demostrar cualquiera de las siguientes proposiciones:

1. Todo S está a la derecha de x (figura 12 *a)).*
2. Parte de S está a la izquierda de x (figura 12 *b*)).
3. Todo S está a la izquierda de x (figura 12 *c*)).
4. Parte de S está a la derecha de x (figura 12 *d*)).

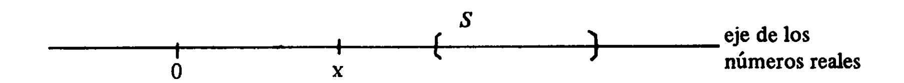


Figura 12 *a*) Todo S a la derecha de x

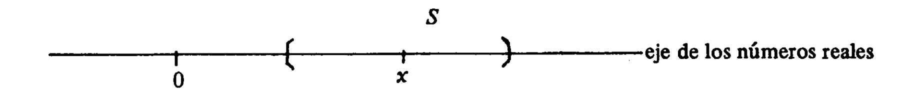


Figura 12 *b*) Parte de S a la izquierda de x

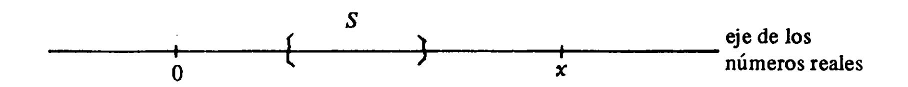


Figura 12 *c*) Todo de S a la izquierda de x

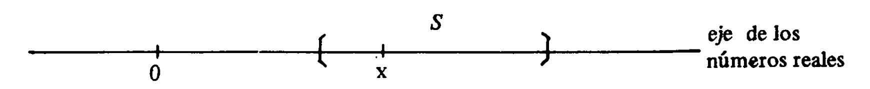


Figura 12 *d*) Parte de S a la derecha de x

En problemas matemáticos estas cuatro proposiciones aparecen probablemente como:

a) mín $\{s: s$ está en $S\} \geqslant x$.
b) mín $\{s: s$ está en $S\} \leqslant x$.
c) máx $\{s: s$ está en $S\} \leqslant x$
d) máx $\{s: s$ está en $S\} \geqslant x$

La técnica de demostración relacionada con los primeros dos incisos se estudia a continuación y los dos últimos se dejan como ejercicios. La idea de la técnica máx/mín es convertir el problema en otro equivalente que contenga un cuantificador. Entonces, puede utilizarse el método por selección o por construcción.

Considere, por lo tanto, el problema de determinar si el elemento más pequeño de S es $\geqslant x$. Se puede obtener un problema equivalente que contenga un cuantificador considerando la proposición correspondiente al inciso 1). Dado que "todo" S debería estar a la derecha de x, usted necesita demostrar que para todos los elementos s en S, $x \leqslant s$, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 14. Si R es el conjunto de números reales, entonces mín$\{x(x-1): x$ está en $R\} \geqslant -1/4$.

Explicación detallada de la demostración. Dada la forma de B, se usará el método máx/mín. Del análisis anterior, la proposición B puede convertirse a "para todo número real x, $x(x-1) \geqslant -1/4$". Una vez en esta forma, es claro que el método por selección debería usarse para escoger un número real x para el cual se debe demostrar que $x(x-1) \geqslant -1/4$, o que $(x^2 - x + 1/4) \geqslant 0$. Pero, $(x^2 - x + 1/4) = (x - 1/2)^2$, y este número es siempre $\geqslant 0$ y termina la demostración.

Demostración del ejemplo 14. Para demostrar que mín$\{x(x-1): x$ está en $R\} \geqslant -1/4$, sea x cualquier número real. Entonces, $x(x-1)$ es $\geqslant -1/4$ debido a que $(x^2 - x + 1/4) = (x - 1/2)^2$, lo cual es siempre $\geqslant 0$. ||

Regresando ahora al problema de demostrar que el menor elemento de S es $\leqslant x$, el enfoque es un poco diferente. Considera la proposición correspondiente al inciso 2). Dado que "parte" de S debería estar a la izquierda de x, un problema equivalente es demostrar que existe un elemento s en S tal que $s \leqslant x$. En otras palabras, cuando se

enfrente a la pregunta de abstracción "¿cómo demuestro que mín$\{s$: s está en $S\} \leqslant x$?", usted puede contestarla demostrando que hay una s en S tal que $s \leqslant x$. Entonces, puede utilizarse el método por construcción o por contradicción.

En este capítulo se han descrito tres técnicas especiales para hacer demostraciones las cuales son apropiadas cuando B tiene la forma especial correspondiente. En el capítulo final se proporciona un resumen completo.

EJERCICIOS

Nota: Todas las demostraciones deberán incluir una explicación detallada de la misma así como una versión condensada.

11.1 Demuestre que si x es un número real mayor que 2, entonces existe un número real único $y < 0$ tal que $x = 2y/(1 + y)$.

11.2 Demuestre, usando el segundo método de unicidad, que si m y b son números reales con $m \neq 0$, entonces existe un número real único x tal que $mx + b = 0$.

11.3 Demuestre que si a y b son números reales tales que al menos uno de ellos es diferente de cero $i = \sqrt{-1}$, entonces existe un número complejo único $c + di$ tal que $(a + bi)(c + di) = 1$.

11.4 ¿Cuáles serían las ventajas y desventajas de usar el método por contradicción en lugar del método de la o exclusiva para demostrar que "A implica (B o C)"?

11.5 Demuestre que si n es un entero par y m es un entero impar, entonces 4 divide a mn o 4 no divide a n.

11.6 Considere la proposición "Si x es un número real tal que $x^3 + 3x^2 - 9x - 27 \geqslant 0$, entonces $|x| \geqslant 3$.

a) Formule la proposición de tal manera que sea de la forma "A implica B o C".

b) Demuestre la proposición suponiendo que A y *NO* B son verdaderos.

c) Demuestre la proposición suponiendo que A y *NO* C son verdaderos.

11.7 Convierta los siguientes problemas de máx/mín en proposiciones que posean el cuantificador adecuado. (*Nota:* S es un conjunto de números reales y x es un número real dado).

a) máx$\{s: s$ está en $S\} \leqslant x$.
b) máx$\{s: s$ está en $S\} \geqslant x$.

En lo que resta de este problema a, b, c y u son números reales dados y x es una variable.

c) mín$\{cx: ax \leqslant b$ y $x \geqslant 0\} \leqslant u$.
d) máx$\{cx: ax \geqslant b$ y $x \geqslant 0\} \geqslant u$.
e) mín$\{ax: b \leqslant x \leqslant c\} \geqslant u$.
f) máx $\{bx: a \leqslant x \leqslant c\} \leqslant u$.

11.8 Demuestre que si S es un subconjunto no vacío de un conjunto T de números reales, y t^* es un número real que satisface la propiedad de que para cada elemento t en T, $t \geqslant t^*$, entonces mín$\{s: s$ está en $S\} \geqslant t^*$.

11.9 Suponga que a, b, y c son números reales dados, y x y u son variables. Demuestre que mín$\{cx: ax \geqslant b, x \geqslant 0\}$es por lo menos tan grande como máx$\{ub: ua \leqslant c, u \geqslant 0\}$.

Capítulo 12

Resumen

La lista de técnicas para hacer demostraciones está completa. Las técnicas presentadas aquí de ningún modo son las únicas, pero constituyen un conjunto básico. Sin duda usted se encontrará otras a medida que avance más en el campo de las matemáticas. Quizás usted desarrolle algunas técnicas propias. En cualquier caso, existen muchos detalles y trucos que usted obtendrá con la práctica. A continuación, se proporciona un resumen final para saber cómo y cuándo se deben usar las diversas técnicas para demostrar la proposición "A implica B".

Con el método progresivo-regresivo usted puede suponer que A es verdadero y su trabajo es demostrar que B es verdadero. A través del proceso progresivo usted deducirá a partir de A, una secuencia de proposiciones $A_1, A_2, \ldots$ las cuales son necesariamente verdaderas como resultado de que se ha supuesto que A es verdadera. Esta secuencia no es aleatoria, sino que está guiada por el proceso regresivo, según el cual, a través de la formulación y respuesta de la pregunta de abstracción, usted obtiene a partir de B una proposición, B_1, con la característica de que si B_1 es verdadera, B también lo es. Este proceso de abstracción puede aplicarse a B_1 obteniendo una nueva proposición B_2 y así sucesivamente. El objetivo es unir la secuencia progresiva con la secuencia regresiva, generando una proposición en la secuencia progresiva, la cual es precisamente igual a la última proposición obtenida en la secuencia regresiva. Entonces, como en una columna de fichas de dominó, usted puede hacer la demostración progresivamente siguiendo la secuencia

desde *A* hasta *B*. Cuando esté tratando de obtener esta secuencia de proposiciones, sea cuidadoso con los cuantificadores que aparezcan, porque, entonces, los métodos por construcción, selección, inducción y particularización pueden ser de utilidad para hacer la demostración.

Por ejemplo, cuando el cuantificador "existe" se origina en el proceso regresivo en la forma usual:

> Existe un "objeto" con una "cierta propiedad" tal que "algo sucede"

usted debería considerar el uso del método por construcción para producir el objeto deseado. Con el método por construcción, usted trabaja progresivamente desde la suposición de que *A* es verdadero para generar (producir o diseñar un algoritmo que produzca, etc.) el objeto. Asegúrese de verificar que el objeto satisface dicha propiedad y, también, que algo sucede.

Por otro lado, cuando el cuantificador "para todo" se origina en el proceso regresivo en la forma usual:

> Para todos los "objetos" con una "cierta propiedad", "algo sucede"

usted debería considerar el uso del método por selección. Aquí su objetivo es diseñar una máquina que haga demostraciones y que sea capaz de tomar cualquier objeto con cierta propiedad y demostrar que algo sucede. Para hacerlo, usted selecciona o escoge un objeto, el cual tiene cierta propiedad. Usted debe concluir que, para dicho objeto, algo sucede. Una vez que usted ha seleccionado el objeto, lo mejor es proceder trabajando progresivamente partiendo del hecho de que el objeto seleccionado tiene cierta propiedad (junto con la información que hay en *A*, si es necesario) y, regresivamente, desde lo que sucede.

El método por inducción deberá tomarse en cuenta (aún antes que el método por selección) cuando la proposición *B* tiene la forma:

> Para todo entero n mayor o igual que algún entero inicial, la proposición $P(n)$ es verdadero.

El primer paso del método de inducción es verificar que la proposición es verdadera para el primer valor posible de n. El segundo paso requiere demostrar que si $P(n)$ es verdadero entonces $P(n + 1)$ es verdadero.

Recuerde que el éxito de una demostración por inducción reside en su habilidad para relacionar la proposición $P(n + 1)$ con $P(n)$, de modo que pueda hacer uso de la suposición de que $P(n)$ es verdadera. En otras palabras, para realizar el segundo paso de la demostración por inducción, usted debe escribir la proposición $P(n)$, cambiar n en dicha proposición por $(n + 1)$ para obtener $P(n + 1)$ y, entonces, ver si usted puede expresar $P(n + 1)$ en términos de $P(n)$. Sólo entonces podrá usar la suposición de que $P(n)$ es verdadero para llegar a la conclusión deseada de que $P(n + 1)$ es también verdadero.

Finalmente, cuando el cuantificador "para todo" surge en el proceso progresivo en la forma usual:

> Para todos los "objetos" con una "cierta propiedad" "algo sucede"

usted probablemente deseará usar el método por particularización. Para hacer esto, identifique estos objetos cuando aparezcan en el proceso regresivo, porque entonces, con el método por particularización, usted puede concluir que algo sucede para el objeto particular bajo consideración. Este hecho deberá ser útil para llegar a la conclusión de que B es verdadero. Cuando utilice la particularización, asegúrese de verificar que el objeto específico satisface cierta propiedad, porque solamente en ese caso algo sucederá.

Cuando la proposición original B contiene la palabra "no", o cuando falle el método progresivo-regresivo, entonces, usted debe considerar el método contrapositivo o el método por contradicción dando preferencia al primero. Para utilizar el método contrapositivo, debe escribir inmediatamente las proposiciones *NO B* y *NO A*, usando las técnicas del capítulo 10 si es necesario. Entonces, empezando con la suposición de que *NO B* es verdadera, su trabajo es concluir que *NO A* es verdadera. Esto se realiza mejor aplicando el método progresivo-regresivo, trabajando progresivamente a partir de la proposición *NO B* y, regresivamente, a partir de *NO A*. Una vez más, recuerde que tiene que observar los cuantificadores que pudieran aparecer en el proceso progresivo o en el regresivo, ya que, entonces, los métodos por construcción, por selección, por inducción y particularización pueden ser útiles.

En el caso de que fallara el método contrapositivo, existe todavía una esperanza con el método por contradicción. En este método, se le permite a usted suponer no solamente que A es verdadera sino

también que *B* es falsa. Esto le proporciona a usted dos suposiciones a partir de las cuales debe deducir una contradicción a algo que usted sabe es verdadero. No es siempre obvio dónde surge la contradicción, pero ésta se obtendrá trabajando progresivamente las proposiciones *A* y *NO B*.

Al tratar de demostrar "*A* implica *B*", permita que la forma de *B* lo guíe tanto como sea posible. Específicamente, usted debería explorar la proposición *B* buscando ciertas palabras claves, ya que éstas le indicarán a menudo cómo proceder. Por ejemplo, si usted encuentra el cuantificador "existe", considere el método por construcción; en tanto que el cuantificador "para todo" sugiere el método por selección o el método por inducción. Cuando la proposición *B* tiene la palabra "no", usted deseará probablemente utilizar el método contrapositivo o el método por contradicción. Otras palabras claves que se deben buscar son "único", "o", "máximo" y "mínimo", ya que al encontrarlas, usted utilizará los correspondientes métodos de unicidad, o exclusiva, y máx/mín. Si no pudiera escoger un método basándose en la forma de *B*, entonces proceda con el método progresivo-regresivo. La tabla 4 proporciona un resumen completo.

Ahora ya está usted capacitado para "hablar" el lenguaje de las matemáticas. Su nuevo "vocabulario" y "gramática" están completos. Usted ha aprendido los tres métodos de demostración más importantes para demostrar proposiciones, teoremas, lemas y corolarios. Estos son: los métodos progresivo-regresivo, contrapositivo y por contradicción. Usted conoce ahora los diferentes cuantificadores y los métodos correspondientes por construcción, selección, inducción y particularización. Para situaciones especiales, su bolsa de mañas técnicas para hacer demostraciones incluye los métodos de unicidad, o exclusiva y máx/mín. Si todas estas técnicas para hacer demostraciones fallaran, usted posiblemente desearía quedarse con el idioma chino, porque a final de cuentas todo lo antes escrito ¡está en chino!

EJERCICIOS

12.1 Para cada una de las siguientes proposiciones, indique qué técnica utilizaría usted para hacer demostraciones al comenzar la demostración, y explique por qué.

a) Si p y q son enteros impares, entonces la ecuación $x^2 + 2px + 2q = 0$ no tiene como solución para x un número racional.

Tabla 4 Resumen de técnicas para hacer demostraciones.

Técnica de demostración	*Cuándo usarla*	*Qué suponer*	*Qué concluir*	*Cómo hacerlo*
Progresivo-regresivo (página 8)	Como un primer intento o cuando B no tiene forma reconocible	A	B	Trabaje progresivamente partiendo de A y aplique el proceso de abstracción a B.
Contrapositivo (página 72)	Cuando B contiene la palabra "no".	*NO B*	*NO A*	Trabaje progresivamente partiendo de *NO B* y regresivamente partiendo de *NO A*.
Contradicción (página 64)	Cuando B contiene la palabra "no" o cuando los dos primeros métodos fallen.	A y *NO B*	Alguna contradicción.	Trabaje progresivamente partiendo de A y *NO B* para obtener una contradicción.
Construcción (página 34)	Cuando B contiene el término "existe".	A	Existe el objeto deseado.	Adivine, construya, etc. el objeto que tiene cierta propiedad y muestre que algo sucede.
Selección (página 40).	Cuando B contiene el término "para todo", "para cada", etc.	Seleccione un objeto con cierta propiedad, y A.	Que algo sucede.	Trabaje progresivamente partiendo de A y el hecho de que el objeto tiene la cierta propiedad. Trabaje regresivamente partiendo de lo que sucede.

Tabla 4 (continuación)

Técnica de demostración	*Cuándo usarla*	*Qué suponer*	*Qué concluir*	*Cómo hacerlo*
Inducción (página 50)	Cuando B es verdadero para cada entero empezando con alguno en particular, por ejemplo, n_0.	La proposición es verdadera para n.	La proposición es verdadera para $n + 1$. También demuestre que es verdadera para n_0.	Primero sustituya n_0 en todas partes y demuestre que es verdadero. Segundo, recurra a la hipótesis de inducción para demostrar que es verdadero para $n + 1$.
Particularización (página 59)	Cuando A contiene el término "para todo", "para cada", etc.	A	B	Trabaje progresivamente particularizando A a un objeto en especial, es decir, al obtenido en el proceso regresivo.
Unicidad 1 (página 83)	Cuando B contiene la palabra "único".	Existen dos objetos, y A.	Los dos objetos son iguales.	Trabaje progresivamente utilizando A y las propiedades de los dos objetos. También, trabaje progresivamente para mostrar que los objetos son iguales.

Tabla 4 (continuación)

Técnica de demostración	*Cuándo usarla*	*Qué suponer*	*Qué concluir*	*Cómo hacerlo*
Unicidad 2 (página 85)	Cuando B contiene la palabra "único".	Existen dos objetos diferentes, y A.	Alguna contradicción.	Trabaje progresivamente desde A, utilizando las propiedades de los dos objetos y el hecho de que son diferentes.
0 exclusiva 1 (página 86)	Cuando B tiene la forma "C O D".	A y *NO* C	D	Trabaje progresivamente partiendo de A y *NO* C y regresivamente partiendo de D.
0 exclusiva 2 (página 87)	Cuando B tiene la forma "C O D".	A y *NO* D	C	Trabaje progresivamente partiendo de A y *NO* D y regresivamente partiendo de C.
Máx/mín 1 (página 87)	Cuando B tiene la forma "máx $S \leqslant x$" o "mín $S \geqslant x$".	A y seleccione una s en S.	$s \leqslant x$ *o* $x \geqslant x$.	Trabaje progresivamente desde A y el hecho de que s están en S. También trabaje regresivamente.
Máx/mín 2 (página 89)	Cuando B tiene la forma "máx $S \geqslant x$" o "mín $S \leqslant x$".	A	Construya s en S tal que $s \geqslant x$, o $s \leqslant x$.	Utilice A y el método por construcción para producir la s deseada en S.

b) Para cada entero $n \geqslant 4$, $n! > n^2$.

c) Si f y g son funciones convexas, entonces $f + g$ es una función convexa.

d) Si a, b y c son números reales, entonces el máximo valor de $ab + bc + ca$ sujeto a la condición de que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, es $\leqslant 1$.

e) En un plano existe una y sólo una recta perpendicular a una recta ℓ dada que pasa por un punto p en ℓ.

f) Si f y g son dos funciones tales que: 1) para todos los números reales x, $f(x) \leqslant g(x)$ y 2) no existe un número real M tal que para todo x, $f(x) \leqslant M$, entonces no existe un número real $M > 0$ tal que A x, $g(x) \leqslant M$.

g) Si f y g son funciones continuas en el punto x, entonces la función $f + g$ es continua también en x.

h) Si f y g son funciones continuas en el punto x, entonces para cada número real $\epsilon > 0$, existe un número real $\delta > 0$ tal que para todos los números reales y con $|x - y| < \delta$, $|f(x) + g(x) - (f(y) + g(y))| < \epsilon$.

i) Si f es una función de una variable definida por $f(x) = 2^x + x^2/2$, entonces existe un número real x^* entre 0 y 1 tal que para todo y, $f(x^*) \leqslant f(y)$.

12.2 Describa como podría usted utilizar cada uno de los siguientes métodos para demostrar la proposición: "Para cada entero $n \geqslant 4$, $n! > n^2$". Establezca lo que debería suponer y lo que debería concluir.

a) Método por inducción.

b) Método por selección.

c) Método progresivo-regresivo. (*Sugerencia:* convierta el problema en uno equivalente de la forma "Si . . . entonces . . .").

d) Método por contradicción.

Apéndice A:

Aplicación de lo aprendido 1a. parte

A través del uso específico de un ejemplo, este apéndice le mostrará cómo leer y entender una demostración formulada como la que podría aparecer en un libro de texto. Luego se tratarán algunas estrategias generales para resolver problemas y se mostrarán sus aplicaciones mediante un ejemplo.

Debido a la forma en la que se formulan la mayoría de las demostraciones, es necesario que usted pueda determinar las técnicas para hacer demostraciones que se están aplicando y por qué. A menudo, lo que hace que una demostración sea tan difícil de entender es el hecho de que el autor ha omitido parte de su proceso de razonamiento, obligándolo a usted a tener que reconstruir dicho proceso. Para ello se requiere que usted identifique la técnica que se está utilizando y cómo se aplica dicha técnica a ese problema en particular. El siguiente ejemplo muestra como leer una demostración. A diferencia de los ejemplos presentados previamente en este libro, la versión condensada de la demostración precede a la explicación detallada de la misma.

El ejemplo trata el concepto de un conjunto "no acotado" de números reales, es decir, un conjunto en el cual existen elementos que están "arbitrariamente" lejos del 0. A continuación, se presenta una definición formal de conjunto acotado.

- **Definición 17.** Un conjunto S de números reales es acotado si existe un número real $M > 0$ tal que para todos los elementos x en S, $|x| < M$.

Ejemplo 15. Sea T un conjunto de números reales. Si S es un subconjunto de T y si S es no acotado, entonces T es no acotado.

Demostración del ejemplo 15. (Para fines de referencia, cada oración de la demostración se escribirá en una línea aparente).

$P1$: Suponga que S es un subconjunto de T y suponga, por el contrario, que T es acotado.
$P2$: Por lo tanto, existe un número real $M' > 0$ tal que para todo x en T, $|x| < M'$.
$P3$: Se demostrará que S es acotado.
$P4$: Con esa finalidad, sea x' un elemento de S.
$P5$: Dado que S es un subconjunto de T, se deduce que x' pertenece a T.
$P6$: Pero, entonces, $|x'| < M'$ y, por lo tanto, S es acotado, lo cual es una contradicción.||

Explicación detallada de la demostración. Se dá a continuación una interpretación de cada una de las proposiciones $P1$ a $P6$:

Interpretación de P1. El autor está indicando que se va a realizar la demostración por contradicción y, por lo tanto, está suponiendo que (parte de) A es verdadero, es decir, que S es un subconjunto de T y, también, que *NO B* es verdadero, es decir, que T es acotado. Note que el autor no ha establecido explícitamente que S es no acotado aunque está suponiendo que esto es verdadero.

No debería sorprender el hecho de que se use el método por contradicción dado que la conclusión del ejemplo contiene la palabra "no". Algunas veces, es útil examinar la demostración para encontrar la contradicción. En $P6$ se dice que S es acotado y esto contradice la hipótesis de que S es no acotado. Con suerte las proposiciones $P2$ a $P6$ indicarán como trabaja progresivamente el autor a partir de A y *NO B* para llegar a la contradicción.

Interpretación de P2. El autor trabaja progresivamente a partir de la proposición *NO B* (es decir, que T es un conjunto acotado) utilizando la **definición 17** para afirmar que existe un número real $M' > 0$ tal que para todo x en T, $|x| < M'$.

Interpretación de P3. Es aquí donde el autor establece el objetivo deseado de demostrar que S es acotado. Observe que no existe indicación

alguna de que la razón por la cual se desea demostrar que S es acotado es para llegar a una contradicción.

Interpretación de P4. Esta proposición podría parecer confusa a primera vista debido a que el autor ha omitido varios pasos de su proceso de razonamiento. Lo que ha pasado es que el autor se ha planteado implícitamente la pregunta de abstracción "¿cómo puedo demostrar que un conjunto (S) es acotado?", y ha usado la **definición 17** para responderla, según la cual se debe demostrar que existe un número real $M > 0$ tal que para todo x en S, $|x| < M$.

Reconociendo el cuantificador "existe", el método por construcción debería utilizarse para generar el valor deseado de M. Lo que el autor ha omitido es que el valor de M es M' ($P2$). Dado que este es el caso, se debe demostrar que M' tiene las propiedades deseadas, es decir, que $M' > 0$ (lo cual es verdadero) y que para todo x en S, $|x| < M'$.

Reconociendo la presencia de cuantificador "para todo" en el proceso regresivo, uno debería proceder usando el método por selección. Esto es precisamente lo que el autor ha hecho en $P4$ donde establece: " . . . sea x' un elemento de S". Una vez que se ha escogido el elemento x', se debe demostrar que $|x| < M'$, que el autor no ha dicho explícitamente que haría. Observe que la palabra "sea" en $P4$ indica que se ha utilizado el método por selección.

Lo que hace a $P4$ tan difícil de entender es la falta de detalles, particularmente la omisión de la pregunta de abstracción y su respuesta, además de algunos otros pasos. Generalmente, tales detalles se dejan para que usted los descifre.

Interpretación de P5. En $P5$, el autor ha pasado repentinamente al proceso progresivo, y está trabajando progresivamente a partir de A, (es decir, a partir del hecho de que S es un subconjunto de T) usando la definición de subconjuntos para concluir que para todos los elementos x en S, x está en T (**definición 14**). Entonces, sin establecerlo, el autor ha particularizado esta proposición al valor específico de x' que está en S, concluyendo que x' está en T. Observe nuevamente que se ha omitido parte del proceso de razonamiento del autor, y se ha dejado para que usted mismo lo deduzca. En este momento, no está claro porqué es necesario demostrar que x' está en T. La razón debería estar relacionada con la demostración de que $|x'| < M'$

Interpretación de P6. Es aquí donde el autor finalmente concluye que $|x'| < M'$, demostrando por lo tanto que S es acotado y llegando así a contradecir la hipótesis de que S es no acotado. La única pregunta por aclarar es cómo llegó el autor a la conclusión de que $|x'| < M'$. Una vez más, no se ha mencionado la técnica específica usada en la demostración. En realidad, el autor ha utilizado el método por particularización. Específicamente, la proposición $P2$ se ha particularizado al valor específico de x'. Sin embargo, recuerde que cuando se usa el método por particularización, es necesario verificar que el objeto particular bajo consideración (x' en este caso) posee una propiedad particular (que x' pertenece a T). El hecho de que x' está en T se estableció en $P5$, pero observe que, en ese momento, el autor no indicó porqué estaba demostrando que x' está en T.

Lea la versión condensada de la demostración una vez más. Observe que lo que hace que la demostración sea difícil de entender es la falta de referencia a las técnicas que fueron utilizadas, en particular, el proceso regresivo y el método por particularización. Además, el autor ha omitido parte del proceso de razonamiento. Para comprender la demostración usted debe completar los pasos omitidos.

En resumen, cuando lea demostraciones, espere tener que realizar cierto trabajo por su propia cuenta. Aprenda a identificar las diferentes técnicas que se están utilizando. Empiece por tratar de determinar si el método progresivo-regresivo o el método por contradicción es la primera técnica que se utiliza. Luego, trate de seguir la metodología asociada con esa técnica. Manténgase a la expectativa en cuanto a los cuantificadores, porque, entonces, es muy probable que se utilicen los correspondientes métodos por selección, construcción y particularización. Sea especialmente cuidadoso con las complicaciones de notación que puedan surgir en los métodos por selección y particularización. Por ejemplo, en la demostración condensada del ejemplo 15, el autor pudo haber utilizado los símbolos "x" y "M" en vez de "x'" y "M'". Si éste hubiera sido el caso, usted debería haber tenido que distinguir entre proposiciones tales como "para todo x con una cierta propiedad, algo sucede", en el cual "x" se refiere a un objeto general, y una proposición de la forma "sea x con una cierta propiedad" en el cual "x" se refiere a un objeto específico. El doble uso de un símbolo es confuso, pero es una práctica común en las demostraciones, lo cual será ilustrado en el apéndice B.

En cualquier caso, cuando usted sea incapaz de seguir un determinado paso en una demostración, es muy probable que se deba a la

falta de una explicación detallada. Para aclarar cualquier paso intermedio, aprenda a preguntarse a sí mismo cómo procedería para realizar dicha demostración. Luego, trate de ver si la demostración que está estudiando concuerda con su proceso de razonamiento.

Ahora que usted sabe cómo leer una demostración es tiempo de ver cómo hacer una por sí mismo. En el ejemplo que sigue ponga particular atención a la forma en la cual las proposiciones bajo consideración determinan la técnica que va a utilizarse.

Ejemplo 16. Si T es un conjunto acotado de números reales, entonces cualquier subconjunto de T es acotado.

Explicación detallada de la demostración. Observando la proposición B, usted debería identificar el cuantificador "para todo" y, por lo tanto, debería empezar con el método por selección. Consecuentemente, usted escribiría: "Sea S un subconjunto de T. Se demostrará que S es acotado". Entonces, la nueva proposición que va a demostrarse es:

B_1 : S es acotado.

Dado que a B_1 no se le reconoce ninguna forma especial, lo mejor es, probablemente, proceder con el método progresivo-regresivo. La idea es trabajar regresivamente desde B_1 hasta que no sea fructífero seguir en esa dirección. Entonces, el proceso progresivo se aplicará a la hipótesis de que T es un conjunto acotado de números reales.

Trabajando regresivamente a partir de B_1, ¿puede usted plantear la pregunta de abstracción? Una posible pregunta es "¿cómo puedo demostrar que un conjunto (S) es acotado?" Una manera razonable de responder una pregunta de abstracción es mediante el uso de una definición. Hacer esto en este caso significa que usted debe demostrar que:

B_2 : Existe un número real $M > 0$ tal que para todos los elementos x en S, $|x| < M$.

La presencia del cuantificador "existe" sugiere utilizar el método por construcción, e indica así mismo que usted debería cambiar al proceso progresivo para generar el valor deseado de M. Trabajando progresivamente a partir de la hipótesis de que T es acotado, ¿existe algo

que usted pueda predecir que es verdadero? A_1 menos, una posibilidad es usar la definición, mediante la cual usted puede concluir que:

A_1 : Existe un número real $M' > 0$ tal que para todos los elementos x en T, $|x| < M'$.

Observe que el símbolo "M'" se ha utilizado en lugar de "M" debido a que "M" se utilizó en el proceso regresivo.

Quizá M' es el valor deseado de M. Cuando se utiliza el método por construcción, generalmente se recomienda tratar de generar el objeto deseado de la manera más obvia. En este caso, esto significa hacer $M = M'$. Si esta suposición es correcta, entonces usted debe demostrar todavía que la propiedad particular se satisface (es decir, $M > 0$) y que, también, algo sucede (es decir, para todo x en S, $|x| < M$). No es difícil ver que $M > 0$ porque $M' > 0$ y $M = M'$. Por io tanto, queda sólo por demostrar que:

B_3 : Para todos los elementos x en S, $|x| < M$.

La presencia del cuantificador "para todo" sugiere proceder con el método por selección, según el cual usted debe seleccionar un elemento, por ejemplo x', en S para el cual usted debe demostrar que:

B_4 : $|x'| < M$, o dado que $M = M'$, $|x'| < M'$.

Observe que el símbolo "x'" se ha usado para un objeto en particular con el fin de evitar confusiones con el símbolo "x". Pudiera no ser muy claro cómo se llega a la conclusión de que $|x'| < M'$. Pero examine cuidadosamente la proposición A_1. Observe que se podría utilizar el método por particularización para llegar a la conclusión deseada de que $|x'| < M'$, siempre y cuando usted pueda particularizarla a la proposición $x = x'$. Con la finalidad de hacer esto, debe asegurarse de que el objeto particular bajo consideración (x') satisface la cierta propiedad (que x' está en T). Su objetivo es, por lo tanto, demostrar que x' está en T.

Recuerde que se seleccionó x' como un elemento de S, y que S fue designado como un subconjunto de T. ¿Cómo podría usted utilizar esta información para demostrar que x' está en T? Trabajando progresivamente a partir de la definición de un subconjunto, usted que para todo x en S, x está en T. Por lo tanto, usted puede particularizar

esta proposición a $x = x'$ la cual usted sabe que está en S y, de esa forma, llegar a la conclusión deseada de que x' está en T, completando así la demostración.

Demostración del ejemplo 16. Sea S un subconjunto de T. Para demostrar que S es acotado, se generará un número real $M > 0$ con la propiedad de que para todo x en S, $|x| < M$.

Por hipótesis, T es acotado y, por lo tanto, existe un número real $M' > 0$ tal que, para todo x en T, $|x| < M'$. Haga $M = M'$. Para ver que M posee las propiedades deseadas, sea x' un elemento de S. Dado que S es un subconjunto de T, x' está en T. Se concluye $|x'| < M = M'$, como se deseaba.||

La solución de problemas no es una ciencia precisa, algunas sugerencias generales serán dadas aquí, pero un estudio más detallado puede encontrarse en el libro: *How to Solve It* de George Polya (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1945) o en el libro: *How to Solve Problems* de Wayne Wickelgren (W. H. Freeman, San Francisco, CA, 1974).

Cuando trate de demostrar que "*A* implica *B*", escoja concienzudamente una técnica basada en la forma de *B*. Si ninguna forma es evidente, lo mejor es probablemente proceder con el método progresivo-regresivo. Si este método no tiene éxito existen otros caminos a seguir antes de rendirse. Usted podría tratar preguntándose a sí mismo por qué *B* no puede ser falso, lo cual lo conduciría al método por contradicción (o al contrapositivo).

Cuando, por alguna razón, usted sea incapaz de completar una demostración, es aconsejable que concienzudamente busque otra técnica. Algunas veces, la forma de la proposición *B* puede manejarse de tal manera que induzca una técnica diferente. Por ejemplo, suponga que la proposición *B* contiene el cuantificador "para todo" en la forma usual:

> Para todos los "objetos" con una "cierta propiedad", "algo sucede".

Si el método por selección falla, usted podría tratar de escribir *B* para que diga:

> No existe un "objeto" con la "cierta propiedad" tal que "algo" no sucede.

En esta forma, debido a la presencia de la palabra "no", el método por contradicción se sugiere por sí mismo, mediante el cual usted supondría que existe un objeto con cierta propiedad tal que algo no sucede. Su objetivo sería alcanzar una contradicción.

Cuando la proposición B tiene una forma identificable, lo mejor es tratar de usar, en primer lugar, la técnica correspondiente. Recuerde que a medida que usted procede a lo largo de la demostración, serán necesarias diferentes técnicas a medida que la forma de la proposición que se esté considerando cambie.

Si usted está realmente estancado, algunas veces es conveniente dejar el problema por un momento, ya que cuando usted regrese al problema, puede vislumbrar un nuevo enfoque. Sin ninguna duda, usted aprenderá muchos trucos por su propia cuenta a medida que resuelva más y más problemas.

Apéndice B:

Aplicación de lo aprendido 2a. parte

Aplicación de aprendido. 2a. Parte

Este apéndice le dará más práctica en leer y hacer demostraciones. Los ejemplos que se han presentado son más difíciles que los del apéndice A. La dificultad adicional se debe en parte, al hecho de que las proposiciones consideradas contienen tres cuantificadores en lugar de dos.

El primer ejemplo está diseñado para enseñarle a leer una demostración condensada, tal y como aparecería en un libro de texto. Como tal, la versión condensada de la demostración precederá a la explicación detallada de la misma, la cual describe cómo leer la versión condensada. El ejemplo trata el concepto de función "continua" de una variable, queriendo decir que si el valor de la variable se cambia "ligeramente", entonces, el valor de la función no cambia "radicalmente". Otra manera de decir que una función es continua es que su gráfica puede dibujarse sin levantar el lápiz. Para proceder formalmente, se da una definición de continuidad.

- **Definición 18.** Una función f de una variable es continua en el punto x si para todo número real $\epsilon > 0$, existe un número real $\delta > 0$ tal que, para todos los números reales y con la propiedad $|x - y| < \delta$, se cumple que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Ejemplo 17. Si f y g son dos funciones continuas en x, entonces la función $f + g$ también es continua en x. (*Nota:* la función $f + g$ es la función cuyo valor en cualquier punto y es $f(y) + g(y)$).

Demostración del ejemplo 17. (Para fines de referencia, cada oración de la demostración se escribirá en una línea aparte).

*P*1: Para ver que la función $f + g$ es continua en x, sea $\epsilon > 0$.
*P*2: Se demostrará que existe un $\delta > 0$ tal que, para toda y con $|x - y| < \delta$, $|f(x) + g(x) - (f(y) + g(y))| < \epsilon$.
*P*3: Dado que f es continua en x, existe un $\delta_1 > 0$ tal que, para toda y con $|x - y| < \delta_1$, $|f(x) - f(y)| < \epsilon/2$.
*P*4: Análogamente, dado que g es continua en x, existe $\delta_2 > 0$ tal que, para toda y con $|x - y| < \delta_2$, $|g(x) - g(y)| < \epsilon/2$.
*P*5: Sea $\delta = \text{mín } \{\delta_1, \delta_2\}$, (el cual es > 0), y sea y tal que $|x - y| < \nu$.
*P*6: Entonces $|x - y| < \delta_1$ y $|x - y| < \delta_2$, por lo tanto, $|f(x) + g(x) - (f(y) + g(y))| \leqslant |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$, lo cual completa la demostración.||

Explicación detallada de la demostración. Sigue una interpretación de cada uno de los postulados *P*1 a *P*6.

Interpretación de P1. Esta proposición indica que se va a utilizar el modelo progresivo-regresivo debido a que la proposición: "para ver que la función $f + g$ es continua en x", significa que el autor va a demostrar que la proposición *B* es verdadera. La pregunta es: ¿por qué dijo el autor ". . . sea $\epsilon > 0$?" Se espera que esto esté relacionado con la demostración de que $f + g$ es continua en x. Lo que ha pasado es que el autor ha planteado implícitamente la pregunta de abstracción: "¿cómo puedo demostrar que una función $(f + g)$ es continua en un punto (x)?", y ha utilizado la **definición 18** para contestarla, según la cual debe demostrarse que para todo $\epsilon > 0$, "algo sucede".

Reconociendo la presencia del cuantificador "para todo" en el proceso regresivo, se debería proceder entonces con el método por selección, según el cual se escogerá un valor específico de $\epsilon > 0$. El autor ha hecho esto cuando dice ". . . sea $\epsilon > 0$". Observe que el símbolo "ϵ" que aparece en la definición de continuidad se refiere a un valor general para ϵ, mientras que el símbolo "ϵ" que aparece en *P*1 se refiere a un valor específico resultante del método por selección. El doble uso de un símbolo puede ser confuso, pero es común en demostraciones escritas.

Lo que hace a *P*1 tan difícil de entender es que el autor ha omitido parte del proceso de razonamiento, es decir, la pregunta de abs-

tracción y su respuesta. Detalles como éste se dejan frecuentemente para que usted los aclare por sí mismo.

Interpretación de P2. El autor está estableciendo precisamente lo que va a hacer, pero ¿por qué quiere demostrar que existe un $\delta > 0$ tal que "algo sucede"? Recuerde que en *P*1, se utilizó el método por selección para escoger un $\epsilon > 0$, entonces, debe demostrarse que para ese ϵ, algo sucede. Ese algo es "existe un $\delta > 0$. . ." como se establece en *P*2 (**definición 18**).

Interpretación de P3. El autor ha cambiado hacia el proceso progresivo (habiendo observado a partir de *P*2 que el cuantificador "existe" sugiere la utilización del método por construcción para generar el $\delta > 0$ deseado). El autor está trabajando progresivamente a partir de la hipótesis de que f es continua en x por medio de la **definición 18.** Lo que el autor ha omitido decirle es que, en la definición, aparece el cuantificador "para todo", y la proposición ha sido particularizada al valor de $\epsilon/2$, donde ϵ es el que fue seleccionado en *P*1. Note que, nuevamente, el símbolo "ϵ" en la **definición 18** se refiere a un valor general para ϵ, mientras el símbolo "ϵ" en *P*1 se refiere a un valor específico para ϵ. En este momento, no es claro por qué el autor decidió particularizar al valor de $\epsilon/2$ en lugar de ϵ. La razón se hará evidente en *P*6.

Interpretación de P4. El autor está trabajando progresivamente a partir del hecho de que g es continua en x, precisamente de la misma manera en que fue hecho en *P*3. Se debe tener presente que, a partir de *P*2, el autor está tratando de generar un valor de $\delta > 0$ para el cual algo sucede.

Interpretación de P5. Es aquí donde se genera el valor deseado de $\delta > 0$. Los valores de δ_1 y δ_2 provenientes de P_3 y P_4, respectivamente, se combinan para obtener el δ deseado, es decir, $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$. No está claro todavía porqué δ ha sido generado de esa manera. De cualquier forma, es responsabilidad del autor mostrar que $\delta > 0$ y, también, que δ satisface la propiedad deseada de que para todo y con $|x - y| < \delta$, $|f(x) + g(x) - (f(y) + g(y))| < \epsilon$ ver (*P*2).

En *P*5 el autor simplemente indica que $\delta > 0$ (lo cual es cierto debido a que ambos δ_1 y δ_2 son > 0). También, la razón por la cual el autor ha dicho ". . . sea y tal que $|x - y| < \delta$", es porque el método

por selección está siendo utilizado para demostrar que, para todo y con $|x - y| < \delta$, $|f(x) + g(x) - (f(y) + g(y))| < \epsilon$. Observe de nuevo el doble uso del símbolo "y". Sin embargo, para completar la prueba, debe demostrarse que $|f(x) + g(x) - (f(y) + g(y))| < \epsilon$.

Interpretación de P6. Es aquí donde el autor concluye que $|f(x) + g(x) - (f(y) + g(y))| < \epsilon$. La única pregunta es cómo. No es difícil ver que

$$|f(x) + g(x) - (f(y) + g(y))| \leqslant |f(x) - f(y)| + |g(x) + g(y)|$$

porque el valor absoluto de la suma de los números $(f(x) - f(y))$ y $(g(x) - g(y))$ es simple $\leqslant$ que la suma de los valores absolutos de los dos números; pero, ¿por qué es?

$$|f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| < \epsilon/2 + \epsilon/2?$$

De nuevo, el autor ha omitido parte del proceso de razonamiento.

Lo que pasa es que se ha utilizado el método por particularización para afirmar que $|f(x) - f(y)| < \epsilon/2$ y $|g(x) - g(y)| < \epsilon/2$. Específicamente, las proposiciones $P3$ y $P4$ han sido ambos particularizados al valor particular de y que fue seleccionado en $P5$. Recuerde que cuando se utiliza el método por particularización, uno debe de estar seguro de que el objeto particular bajo consideración (y) satisface cierta propiedad (en este caso, $|x - y| < \delta_1$ y $|x - y| < \delta_2$). Observe que en $P6$ el autor afirma que $|x - y| < \delta_1$ y $|x - y| < \delta_2$, pero ¿puede usted ver por qué es esto cierto? Observe nuevamente $P5$. Dado que y se escogió de tal manera que $|x - y| < \delta$ y $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$, debe ser que $\delta \leqslant \delta_1$ y $\delta \leqslant \delta_2$, así que, verdaderamente, $|x - y| < \delta_1$ y $|x - y| < \delta_2$. Por consiguiente, el autor está justificado al particularizar $P3$ y $P4$ a este valor particular de y y, por consiguiente, puede concluir que $|f(x) - f(y)| < \epsilon/2$ y $|g(x) - g(y)| < \epsilon/2$. En otras palábras, el autor está justificado al afirmar que $f(x) + g(x) - (f(y) + g(y))| \leqslant |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. Tal vez ahora esté claro también por qué el autor particularizó en $P3$ y $P4$ a $\epsilon/2$ en lugar de ϵ.

De nuevo, observe que lo que hace que $P6$ sea tan difícil de entender es la omisión de una parte del proceso de razonamiento. Usted debe aprender a completar los pasos omitidos determinando qué técnica se ha utilizado y, consecuentemente, lo que se ha hecho.

El siguiente ejemplo ilustra cómo hacer su propia demostración. Ponga particular atención en cómo la forma de la proposición bajo consideración conduce a la técnica correcta.

Ejemplo 18. Si f es una función de una variable la cual, en el punto x, satisface la propiedad de que existen números reales $c > 0$ y $\delta' > 0$ tal que, para todo y con $|x - y| < \delta'$, $|f(x) - f(y)| \leqslant c|x - y|$, entonces f es continua en x.

Explicación detallada de la demostración. Empiece por observar la proposición B, y trate de seleccionar una técnica para hacer demostraciones. Dado que B no tiene una forma particular, el método progresivo-regresivo debe utilizarse. Por lo tanto, usted es conducido a la pregunta de abstracción, "¿cómo puedo demostrar que una función (f) es continua en un punto (x)?" Como es usual, se dispone de una definición para proporcionar una respuesta, y, en este caso, se trata de demostrar que:

> B_1: Para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, para toda y con $|x - y| < \delta$, $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Observando a B_1, usted debe reconocer el cuantificador "para todo" y, por lo tanto, utilizar el método por selección para escoger un valor particular de $\epsilon > 0$. Es recomendable utilizar un símbolo diferente a "ϵ" para la selección específica y, así, evitar confusiones. En la demostración condensada usted escribiría "sea $\epsilon' > 0$. . .". Una vez que ha seleccionado $\epsilon' > 0$, el método por selección requiere que demuestre que algo sucede, en este caso:

> B_2: Existe un $\delta > 0$ tal que, para toda y con $|x - y| < \delta$, $|f(x) - f(y)| < \epsilon'$.

Observando B_2, usted debe identificar el cuantificador "existe" y, por consiguiente, utilizar el método por construcción para generar el valor deseado de δ. Cuando se usa el método por construcción, es recomendable cambiar al proceso progresivo para generar el objeto deseado.

Trabajando progresivamente partiendo de la hipótesis de que existen números reales $c > 0$ y $\delta' > 0$ para los cuales algo sucede, usted debe intentar generar δ. Tal vez $\delta = \delta'$ (o tal vez $\delta = c$). ¿Por qué no suponer que $\delta = \delta'$ y ver si esto es correcto? Si no, tal vez

usted descubrirá cuál debe ser el valor apropiado de δ. Para verificar si la actual suposición de que $\delta = \delta'$ es correcta, es necesario ver si la propiedad deseada en B_2 se cumple para δ' y, además, si algo sucede. Partiendo de B_2, "aquella" cierta propiedad es que $\delta > 0$, pero dado que $\delta = \delta'$ y $\delta' > 0$, debe ser que $\delta > 0$. Entonces, sólo queda verificar que para $\delta = \delta'$:

B_3: Para toda y con $|x - y| < \delta$, $|f(x) - f(y)| < \epsilon'$.

En B_3, usted debe haber observado la existencia del cuantificador "para todo" en el progreso regresivo y debe usar el método por selección para escoger un valor particular de y, (y'), con $|x - y'| < \delta$. El método por selección requiere entonces que usted demuestre que algo sucede, en este caso:

B_4: $|f(x) - f(y')| < \epsilon'$.

Para ver si B_4 es verdadero, la hipótesis tiene información que aún no se ha utilizado. Específicamente, el número $c > 0$ no se ha utilizado, como tampoco la proposición:

A_1: Para toda y con $|x - y| < \delta'$, $|f(x) - f(y)| \leqslant c|x - y|$.

Después de notar la existencia del cuantificador "para todo" en el proceso progresivo, usted debería considerar el uso de método por particularización. La única pregunta es a qué valor de y particulariza. ¿Por qué no tratar con el valor de y' que se ha obtenido en el proceso regresivo? Afortunadamente, y' fue escogida para tener "cierta propiedad" en A_1 (es decir, $|x - y'| < \delta$ y $\delta = \delta'$, entonces $|x - y'| < \delta'$), por lo tanto, usted puede particularizar A_1 a y' obteniendo:

A_2: $|f(x) - f(y')| \leqslant c|x - y'|$.

Recuerde que la última proposición obtenida en el proceso regresivo fue B_4, entonces la idea es ver si A_2 puede modificarse de modo que se parezca a B_4. Por ejemplo, como y' fue seleccionada de modo que $|x - y'| < \delta$, A_2 puede escribirse en la forma:

A_3: $|f(x) - f(y')| < c\delta$.

B_4 se obtendría si se supiera que $c\delta < \epsilon'$. Desafortunadamente, $\delta = \delta'$, pero usted no sabe que $c\delta' < \epsilon$. Esto significa que la suposición original de $\delta = \delta'$ era incorrecta. Tal vez δ debería haberse escogido > 0 tal que $c\ \delta < \epsilon'$, o equivalentemente, dado que $c > 0$, por qué no escoger $0 < \delta < \epsilon'/c$.

Para ver si la nueva suposición de $0 < \delta < \epsilon'/c$ es correcta, es necesario verificar si, para este valor de δ, "aquella" cierta propiedad en B_2 se cumple y, además, si algo sucede. Claramente, δ se ha escogido > 0 y, por lo tanto, tiene "aquella" cierta propiedad. Sólo queda por verificar si B_3 es verdadero.

Como antes, uno procedería con el método por selección para seleccionar y' con $|x - y'| < \delta$ y, otra vez, sería necesario demostrar que B_4 es verdadero. El enfoque previo fue particularizar A_1 a y'. Ahora, sin embargo, hay un problema, porque no se sabe si y' satisface "aquella" cierta propiedad en A_1, es decir, que $|x - y'| < \delta'$. Desafortunadamente, todo lo que sabe es que $|x - y'| < \delta$ y $0 < \delta'/c$.. Si usted pudiera aplicar el método por particularización a A_1, entonces obtendría precisamente A_3 y, finalmente, dado que $c\ \delta < \epsilon'$, usted podría llegar a la conclusión deseada de que B_4 es verdadero.

¿Puede usted imaginarse cómo seleccionar δ tal que $c\ \delta < \epsilon'$ y tal que A_1 puede ser particularizado a y'? La respuesta es seleccionar $0 < \delta \surd$ín$\{\delta', \epsilon'/c\}$, entonces, cuando y' se selecciona con $|x - y'| < \delta$, se obtendrá que $|x - y'| < \delta'$ porque $\delta < \delta'$. Entonces, será posible particularizar A_1 a y'. Además, a partir de A_2 y del hecho de que $\delta < \epsilon'/c$, será posible concluir que $|f(x) - f(y')| \leqslant c|x - y'| < c\ \delta \leqslant c(\epsilon'/c) = \epsilon'$, completando así la demostración.

Demostración del ejemplo 18. Para demostrar que f es continua en x, sea $\epsilon' > 0$. Por hipótesis, es posible construir $0 < \delta < \text{mín}\{\delta', \epsilon'/c\}$. Entonces, para y' con $|x - y'| < \delta$ se deduce que $|x - y'| < \delta$, y, así, por hipótesis, $|f(x) - f(y')| \leqslant c|x - y'| < c\delta$. También, como $\delta < \epsilon'/c$, se tiene $|f(x) - f(y')| < c\ \delta \leqslant c(\epsilon'/c) = \epsilon'$, y así se completa la demostración.||

Como con cualquier idioma, para leerlo, escribirlo y hablarlo se requiere práctica. Las técnicas para hacer demostraciones están diseñadas para guiarlo en la dirección correcta.

Soluciones de los ejercicios

CAPÍTULO 1

1.1 *a*), *c*), *e*) y *f*) son proposiciones.

1.2 *a*) Hipótesis: el triángulo rectángulo XYZ, con catetos x y y, e hipotenusa z, tiene un área de $z^2/4$.
Conclusión: el triángulo XYZ es isósceles.
b) Hipótesis: n es un entero par.
Conclusión: n^2 es un entero par.
c) Hipótesis: a, b, c, d, e y f son números reales que satisfacen la propiedad $ad - bc \neq 0$.
Conclusión: de las dos ecuaciones lineales $ax + by = e$ y $cx + dy = f$ se pueden encontrar valores para x y y.
d) Hipótesis: n es un entero positivo.
Conclusión: la suma de los n primeros enteros es $n(n + 1)/2$.
e) Hipótesis: r es un número real y satisface $r^2 = 2$.
Conclusión: r es un número irracional.
f) Hipótesis: p y q son números reales positivos con $\sqrt{pq} \neq (p + q)/2$.
Conclusión: $p \neq q$.
g) Hipótesis: x es un número real.
Conclusión: el valor mínimo de $x(x - 1)$ es por lo menos $-1/4$.

1.3 Si quiere demostrarse que "$A => B$" es verdadera y se sabe que B es falsa, entonces A también debe ser falsa. Ello se debe a que si

A es falsa, entonces no importa si B es verdadera o falsa, pues la tabla 1 asegura que "$A => B$" es verdadera. Por otra parte, si A es verdadera y B es falsa, entonces "$A => B$" sería falsa.

1.4 *a*) Verdadera, porque A es falsa.
b) Verdadera, porque tanto A como B son verdaderas.
c) Verdadera, porque B es verdadera. El valor de verdad de A no importa.
d) Verdadera si $x \neq 3$ porque entonces A es falsa. Falsa si $x = 3$ porque entonces A es verdadera.

1.5 *a*) (V = verdadera, F = falsa).

A	B	C	$(B => C)$	$A => (B => C)$
V	V	V	V	V
V	V	F	F	F
V	F	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	V	V
F	V	F	F	V
F	F	V	V	V
F	F	F	V	V

b) (V = verdadera, F = falsa)

A	B	C	$(A => B)$	$(A => B) => C$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	V	F	V	F
F	F	V	V	V
F	F	F	V	F

CAPÍTULO 2

2.1 El proceso progresivo es aquel en el que se usa específicamente la información contenida en la proposición *A*, la hipótesis. El proceso regresivo es aquel en el que se intenta encontrar una serie encadenada de proposiciones que lleven directamente al hecho de que *B*, la conclusión, es verdadera. En el proceso regresivo se encuentra incorporado el proceso de abstracción, el cual tiene por objeto generar dicha serie encadenada de proposiciones, una a la vez.

Específicamente, el proceso regresivo se lleva a cabo empezando con la proposición *B*, cuya veracidad es la que se quiere concluir. A continuación, se aplica el proceso de abstracción para plantear y responder las preguntas de abstracción, derivándose así una serie de proposiciones nuevas con la propiedad de que si esta serie de nuevas proposiciones es verdadera, entonces *B* también lo será. El proceso de abstracción continuará de esta manera hasta que se llegue a la proposición *A*, o bien, hasta que ya no sea posible plantear o responder una pregunta de abastracción. En el proceso regresivo pueden presentarse dificultades, como la posibilidad de que haya más de una pregunta de abstracción. En tal caso, debe utilizarse la información de la proposición *A* como apoyo para elegir la pregunta adecuada. Una segunda dificultad es que puede haber más de una respuesta para una pregunta y algunas de ellas pueden no conducir a la terminación de la demostración.

El proceso progresivo se inicia con la proposición *A*, la cual se supone verdadera y, a partir de ella, se deriva una serie de proposiciones nuevas cuya veracidad resulta del hecho de que la proposición *A* es verdadera. Todas las proposiciones nuevas derivadas de *A* deberán tener por objeto su vinculación con la última proposición derivada del proceso regresivo. La última proposición del proceso regresivo actúa como punto de referencia en el proceso progresivo, justo como la última proposición del proceso progresivo sirve de ayuda para elegir la pregunta de abstracción correcta así como su respuesta correcta.

2.2 *c*) es incorrecta porque utiliza la notación específica para el problema dado.

2.3 *a*) es correcta porque en ella se pregunta, en términos abstractos, cómo puede demostrarse la veracidad de la proposición *B*.

b) y *c*) no son válidas porque utilizan la notación específica del problema. El inciso *d*) es una pregunta incorrecta para este problema.

2.4 *a*) ¿Cómo puede demostrarse que dos rectas son paralelas? ¿Cómo puede demostrarse que dos rectas no se intersecan? ¿Cómo puede demostrarse que dos rectas tangentes a una circunferencia son paralelas? ¿Cómo puede demostrarse que dos rectas tangentes que pasan por los extremos del diámetro de un círculo son paralelos?

b) ¿Cómo puede demostrarse que una función es continua? ¿Cómo puede demostrarse que la suma de dos funciones es continua? ¿Cómo puede demostrarse que la suma de dos funciones continuas es continua?

c) ¿Cómo puede demostrarse que un entero es par? ¿Cómo puede demostrarse que un número es un entero par? ¿Cómo puede demostrarse que un entero no es impar? ¿Cómo puede demostrarse que el cuadrado de un entero es par?

d) ¿Cómo puede demostrarse que la solución de un polinomio de segundo grado es un entero específico? ¿Cómo se resuelve una ecuación de segundo grado? ¿Cómo puede demostrarse que dos ecuaciones de segundo grado tienen una raíz común?

2.5 *a*) Demuestre que su diferencia es igual a cero. Demuestre que uno de ellos es menor o igual que el otro y viceversa. Demuestre que su cociente es igual a uno. Demuestre que ambos son iguales a un tercer número.

b) Demuestre que los lados-ángulos-lados correspondientes son iguales. Demostrar que los ángulos-lados-ángulos correspondientes son iguales. Demostrar que los lados-lados-lados correspondientes son iguales. Demostrar que ambos triángulos son congruentes con un tercer triángulo.

c) Demuestre que las dos rectas están en el mismo plano y que no se intersecan. Demuestre que ambas son perpendiculares a una tercera recta. Demuestre que sus pendientes son iguales. Demuestre que sus respectivas ecuaciones son idénticas o que no tienen una solución común. Demuestre que ambas son paralelas a una tercera recta.

d) Demuestre que el cuadrilátero tiene tres ángulos rectos. Demuestre que es un cuadrado. Demostrar que es un paralelogramo con un ángulo recto.

2.6 *a*) 1. ¿Cómo puede demostrarse que la solución de una ecuación de segundo grado es positiva?
2. Demostrar que la fórmula para resolver una ecuación de segundo grado da un resultado positivo.
3. Demostrar que la solución $-b/a$ es positiva.

b) 1. ¿Cómo puedo demostrar que un triángulo es equilátero?
2. Demuestre que son iguales las longitudes de los tres lados o demostrar que los tres ángulos son iguales.

c) Demuestre que $\overline{RT} = \overline{ST} = \overline{SR}$ o que el ángulo R = ángulo S = ángulo T.

2.7 *a*) $(x-2)(x-1) < 0$.
$x(x-3) < -2$.
$-x^2 + 3x - 2 > 0$.

b) $x/z = 1/\sqrt{2}$.
El ángulo X tiene 45 grados.
$\cos(X) = 1/\sqrt{2}$.

c) La circunferencia tiene su centro en (3, 2).
La circunferencia tiene radio 5.
La circunferencia corta el eje y en (0, 6) y (0, −2).
$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 25$.

d) $\overline{UV} = \overline{VW} = \overline{UW}$.
Angulo U = ángulo W = ángulo V = 60 grados.
El triángulo es isósceles.
La altura del triángulo es $\sqrt{3}/2$ veces la longitud de un lado.

2.8 *d*) no es válido porque en la hipótesis no se establece que "$x \neq 5$" y, por consiguiente, si $x = 5$, entonces no será posible la división entre $x - 5$.

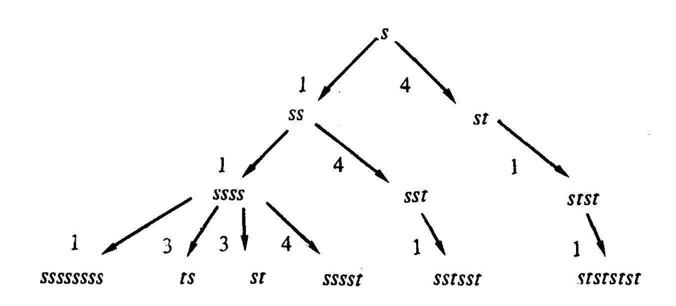
2.9 *a*) ***Descripción de la demostración.*** Una pregunta de abstracción relacionada con la conclusión es "¿Cómo puedo demostrar que un número real (a saber, x) es 0? Para demostrar que $x = 0$ se establecerá que se cumplen $x \leqslant 0$ y $x \geqslant 0$. Trabajando progresivamente a partir de la hipótesis se establece de inmediato que $x \geqslant 0$. Para ver que $x \leqslant 0$ se demostrará que $x = -y$ y que $-y \leqslant 0$. Las dos últimas proposiciones se infieren trabajando progresivamente de la hipótesis de que $x + y = 0$ (de donde, $x = -y$) y $y \geqslant$ (de donde $-y \leqslant 0$). Sólo resta demostrar que $y = 0$, lo cual se infiere con el proceso progresivo

a partir del hecho de que $x = 0$ y de la hipótesis de que $x + y = 0$. En particular, $0 = x + y = 0 + y = y$.

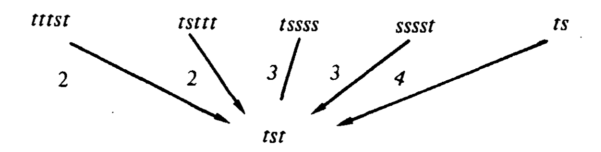
b) ***Demostración.*** Para ver que $x = 0$ y $y = 0$ se demostrará primero que $x \geqslant 0$ (lo cual está dado en la hipótesis) y que $x \leqslant 0$. Esto último se logra demostrando que $x = -y$ y que $-y \leqslant 0$. Para ver que $x = -y$, obsérvese que en la hipótesis se establece que $x + y = 0$. De igual manera, $-y \leqslant 0$ porque en la hipótesis se establece que $y \geqslant 0$. Por lo tanto, $x = 0$.

Por último, para ver que $y = 0$ puede usarse el hecho de que $x = 0$ y la hipótesis de que $x + y = 0$ para llegar a la conclusión buscada. ||

2.10 *a)* El número situado a la izquierda de las flechas del diagrama siguiente indica la regla que se ha aplicado.



b) El número situado a la izquierda de las flechas del diagrama siguiente indica la regla que se ha aplicado.



c) A	: s	dado	A_1	: tst	por el inciso *c*
A_1	: ss	regla 1	A_2	: $tsttst$	regla 1
A_2	: $ssss$	regla 1	A_3	: $tsst$	regla 2
B_1	: $sssst$	regla 4	A_4	: $tssttsst$	regla 1
B	: tst	regla 3	B_1	: $tssst$	regla 2
d) A	: s	dado	B	: $ttst$	regla 3

2.11 Descripción de la demostración. En este problema se tiene·

A: El triángulo rectángulo XYZ es isósceles.
B: El área del triángulo XYZ es $z^2/4$.

Una pregunta de abstracción relativa a B es "¿cómo puedo demostrar que el área de un triángulo es igual a un valor particular?" Una respuesta es usar la fórmula para calcular el área de un triángulo para demostrar que

$B_1 \ : z^2/4 = xy/2$

Trabajando progresivamente a partir de la hipótesis de que el triángulo XYZ es isósceles se tiene:

$A_1 \ : \ x = y$
$A_2 \ : \ x - y = 0$

Puesto que XYZ es un triángulo rectángulo, por el teorema de Pitágoras se obtiene

$A_3 \ : \ z^2 = x^2 + y^2$

De la proposición A_2, después de elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación y de efectuar algunas operaciones algebraicas, se obtiene

$A_4 \ : \ (x - y)^2 = 0$
$A_5 \ : \ x^2 - 2xy + y^2 = 0$
$A_6 \ : \ x^2 + y^2 = 2xy$

Al sustituir A_3 en A_6 se obtiene

$A_7 \ : \ z^2 = 2xy$

Al dividir ambos miembros entre 4 se obtiene finalmente el resultado buscado:

$A_8 \ : \ z^2/4 = xy/2$

Demostración: Por la hipótesis, se sabe que $x = y$ o, en otros términos, que $x - y = 0$. Al efectuar algunas operaciones algebraicas se obtiene $x^2 + y^2 = 2xy$. Por el teorema de Pitágoras, $z^2 = x^2 + y^2$; y al sustituir $x^2 + y^2$ por z^2 se obtiene $z^2 = xy/2$ que es lo mismo que $z^2/4 = xy/2$. Por la fórmula del área de un triángulo rectángulo, el área de $XYZ = xy/2$. Por consiguiente, $z^2/4$ es el área del triángulo. ||

2.12 ***Descripción de la demostración.*** Una pregunta de abstracción relacionada con la conclusión es "¿cómo puedo desmotrar que un triángulo es equilátero?" Una respuesta es demostrar que los tres lados tienen la misma longitud, específicamente, $\overline{RS} = \overline{ST} = \overline{RT}$. Para ver que $\overline{RS} = \overline{ST}$ puede trabajar progresivamente a partir de la hipótesis para establecer que el triángulo RSU es congruente con el triángulo SUT. En particular, por la hipótesis $\overline{RU} = \overline{UT}$ y, además, ángulo RUS = ángulo SUT = 90 grados. Por supuesto $\overline{SU} = \overline{SU}$, de modo que por el teorema lado-ángulo-lado se establece la congruencia de los dos triángulos. Por último, para ver que $\overline{RS} = \overline{RT}$, trabajando progresivamente a partir de la hipótesis se llega a la conclusión de que $\overline{RS} = 2\overline{RU} = \overline{RU} + \overline{UT} = \overline{RT}$.

Demostración. Para ver que el triángulo RST es equilátero, se demostrará en realidad que $\overline{RS} = \overline{ST} = \overline{RT}$. Para este fin, la hipótesis de que $\overline{SU}$ es una bicectriz perpendicular de $\overline{RT}$ asegura (por el teorema lado-ángulo-lado) que el triángulo RSU es congruente con el triángulo SUT. Por consiguiente, $\overline{RS} = \overline{ST}$. Para ver que $\overline{RS} = \overline{RT}$, a partir de la hipótesis se puede concluir fácilmente que $\overline{RS} = 2\overline{RU} = \overline{RU} + \overline{UT} = \overline{RT}$. ||

CAPÍTULO 3

3.1 *a*) Preg. de abs: ¿Cómo puedo demostrar que un entero es impar?
Resp: Demostrar que el entero es igual al doble de un entero más uno.
Resp. esp: Demuestre que $n^2 = 2k + 1$.

b) Preg. de abs: ¿Cómo puedo demostrar que un número real es un número racional?
Resp: Demuestre que el número real es igual al cociente de dos enteros, en el cual el entero del denominador es diferente de cero.

Resp. esp: Demuestre que $s/t = p/q$, donde p y q son enteros y $q \neq 0$.

c) Preg. de abs: ¿Cómo puedo demostrar que dos parejas de números reales son iguales?

Resp. de abs: Demuestre que el primer y segundo elementos de una de las parejas de números reales son iguales al primer y segundo elementos de la otra pareja, respectivamente.

Resp. esp: Demuestre que $x_1 = x_2$ y que $y_1 = y_2$.

d) Preg. de abs: ¿Cómo puedo demostrar que un entero es número primo?

Resp: Demuestre que el entero es positivo, mayor que 1 y que sólo puede dividirse entre sí mismo y la unidad.

Resp. esp: Demuestre que $n > 1$ y, si p es un entero que divide a n, entonces $p = 1$ o $p = n$.

e) Preg. de abs: ¿Cómo puedo demostrar que un entero divide a otro entero?

Resp: Demuestre que el segundo entero es igual al producto del primer entero con otro, y que el primer entero es diferente de cero.

Resp. esp: Demuestre que la expresión siguiente es verdadera para un entero k:

$(n - 1)^3 + n^3 + (n + 1)^3 = 9k$.

3.2 (A es la hipótesis y A_1 es el resultado del primer paso del proceso progresivo).

a) A : n es un entero impar.

A_1 : $n = 2k + 1$, donde k es un entero.

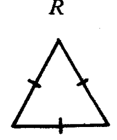
b) A : s y t son números racionales con $t \neq 0$.

A_1 : $s = p/q$, donde p y q son enteros con $q \neq 0$. Asimismo, $t = a/b$, donde a y b son enteros con $b \neq 0$.

c) A : El triángulo RST es equilátero.

A_1 : $\overline{RS} = \overline{ST} = \overline{RT}$, y

ángulo (R) = ángulo (S) = ángulo (T).



d) A : sen (X) = cos (X).
A_1 : $x/z = y/z$ (o bien, $x = y$).
e) A : *a, b, c* son enteros para los que a divide *a*, *b* y *b* divide a *c*.
A_1 : $b = pa$ y $c = qb$, donde p y q son dos enteros y $a \neq 0$, $b \neq 0$.

3.3 (V = verdadera, F = falsa)
a) Tabla de verdad del recíproco de "*A* implica *B*".

A	*B*	"*A* implica *B*"	"*B* implica *A*"
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

b) Tabla de verdad del inverso de "*A* implica *B*".

A	*B*	*NO A*	*NO B*	"*NO A* implica *NO B*"
V	V	F	F	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Nota: El recíproco y el inverso de "*A* implica *B*" son equivalentes. Ambos son falsos si y sólo si *A* es falsa y *B* es verdadera.

c) Tabla de verdad de "*A* o *B*".

A	*B*	"*A* o *B*".
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

d) Tabla de verdad de "*A* y *B*".

A	*B*	"*A* y *B*"
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

e) Tabla de verdad de "*A* y *NO B*".

A	*B*	*NO B*	"*A* y *NO B*"
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F

f) Tabla de verdad de "(*NO A*) o *B*".

A	*NO A*	*B*	(*NO A*) o *B*	"*A* implica *B*"
V	F	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	V

Nota: "*A* implica *B*" y "*NO A* o *B*" son equivalentes. Ambas proposiciones son falsas cuando *A* es verdadera y *B* es falsa.

3.4 *a*) Recíproco: si n es un entero par, entonces n^2 es par.
Inverso: si n es un entero para el que n^2 no es par, entonces n es impar.
Contrapositivo: si n es un entero impar, entonces n^2 es impar.
b) Recíproco: si r no es racional, entonces r es un número real tal que $r^2 = 2$.

Inverso: si r es un número real tal que $r^2 \neq 2$, entonces r es racional.

Contrapositivo: si r es racional, entonces r es un número real tal que $r^2 \neq 2$.

c) Recíproco: si el cuadrilátero *ABCD* es un rectángulo, entonces el cuadrilátero *ABCD* es un paralelogramo con un ángulo recto.

Inverso: si el cuadrilátero *ABCD* no es un paralelogramo con un ángulo recto, entonces el cuadrilátero *ABCD* no es un rectángulo.

Contrapositivo: si el cuadrilátero *ABCD* no es un rectángulo, entonces *ABCD* no es un paralelogramo con un ángulo recto.

d) Recíproco: si $t = \pi/4$, entonces t es un ángulo para el que sen $(t) = \cos(t)$ y $0 < t < \pi$.

Inverso: si t es un ángulo para el que sen $(t) \neq \cos(t)$ y $0 < t < \pi$, entonces $t \neq \pi/4$.

Contrapositivo: si $t \neq \pi/4$, entonces t es un ángulo para el que $0 < t < \pi$, y sen $(t) \neq \cos(t)$.

3.5 ***Descripción de la demostración.*** El método progresivo-regresivo da lugar a la pregunta de abstracción "¿cómo puedo demostrar que un entero (es decir, n^2) es impar?" Se utiliza la definición de entero impar para responder a la pregunta, lo cual significa que debe demostrarse $n^2 = 2k + 1$ para un entero k. Se recurre ahora a la hipótesis y aplicando el proceso progresivo se llega a la conclusión buscada.

Puesto que n es un entero impar, por definición $n = 2m + 1$ para un entero m. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} n^2 &= (2m + 1)^2 \\ &= 4m^2 + 4m + 1 \\ &= 2(2m^2 + 2m) + 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor buscado de k es $(2m^2 + 2m)$, y puesto que m es un entero, $(2m^2 + 2m)$ también lo es. Se ha demostrado por consiguiente que n^2 puede expresarse como el doble de un entero más uno, con lo que se termina la demostración.

Demostración. Puesto que n es un entero impar, existe un entero m para el que $n = 2m + 1$ y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} n^2 &= (2m + 1)^2 \\ &= 4m^2 + 4m + 1 \\ &= 2(2m^2 + 2m) + 1, \end{aligned}$$

y por consiguiente n^2 es un entero impar.||

3.6 ***Descripción de la demostración.*** Aplicando el método progresivo-regresivo se llega a la pregunta de abstracción "¿cómo puedo demostrar que un entero (a saber mn) es impar?" Utilizando la definición de entero impar esta pregunta puede responderse demostrando que mn puede expresarse como el doble de un entero más uno. Se recurre ahora al proceso progresivo para determinar cuál es este entero.

Puesto que m es un entero impar y n es un entero impar, se tiene que $m = 2b + 1$ para un entero b, y que $n = 2c + 1$ para un entero c. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} mn &= (2b + 1)(2c + 1) \\ &= 4bc + 2b + 2c + 1 \\ &= 2(b + c + 2bc) + 1. \end{aligned}$$

De este modo se ha demostrado que mn puede escribirse como el doble de otro entero más 1, siendo $(b + c + 2bc)$ este otro entero, y con ello se determina la demostración.

Demostración. Puesto que m y n son enteros impares, $m = 2b + 1$ y $n = 2c + 1$, donde b y c son enteros. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} mn &= (2b + 1)(2c + 1) \\ &= 2(b + c + 2bc) + 1. \end{aligned}$$

De donde mn es un entero impar. ||

3.7 ***Descripción de la demostración.*** Aplicando el método progresivo-regresivo se llega a la pregunta de abstracción "¿cómo puedo demostrar que una proposición (es decir, A) implica otra proposición (es decir, C)," Según la tabla 1, la respuesta es suponer que la proposición a la izquierda de la palabra "implica" es verdadera para después llegar a la conclusión de que la proposición a la derecha de la palabra "implica" es verdadera. En este caso

particular, se supone que A es verdadera y se intenta demostrar que C también lo es.

Trabajando progresivamente a partir de la información dada en la hipótesis, se encuentra que como "A implica B" es verdadera y A es verdadera, entonces B también debe serlo. Puesto que B es verdadera y "B implica C" es verdadera, C también debe serlo. Por consiguiente, se ha terminado la demostración.

Demostración. Para concluir que "A implica C" es verdadera, supóngase que A es verdadera. Por hipótesis, "A implica B" es verdadera, de modo que B debe ser verdadera. Por último, ya que "B implica C" es verdadera, debe ser que C es verdadera, terminándose así la demostración. ||

3.8 ***Descripción de la demostración.*** El método progresivo-regresivo da lugar a la pregunta de abstracción "¿cómo puedo demostrar que dos proposiciones (es decir, A y B) son equivalentes?" La **definición 8** indica que es necesario demostrar que "A implica B" es verdadera (lo cual está dado por la hipótesis), y que "B implica A" es verdadera. La hipótesis de que "B implica A" y de que "C implica A", junto con el ejercicio 3.7, asegura que "B implica A" es verdadera. La demostración de que A es equivalente a C es similar.

Demostración. Para probar que A es equivalente a B tan sólo se requiere demostrar que "B implica A", ya que la hipótesis establece que "A implica B". El hecho de que "B implica A" se infiere de la hipótesis de que "B implica C" y "C implica A", en conjunción con el ejercicio 3.7. Se omite la demostración de que A es equivalente a C". ||

3.9 *a*) Se requerirán seis demostraciones para probar que A es equivalente de cada una de las tres alternativas. Las seis demostraciones son: $A => B$, $B => A$, $B => C$, $C => A$, $A => D$ y $D => A$.

b) Se requerirían sólo cuatro demostraciones, a saber, $A => B$, $B => C$, $C => D$ y $D => A$.

c) Si las cuatro proposiciones del inciso *b*) anterior son verdaderas, entonces es posible demostrar que A es equivalente a cualquiera de las alternativas mediante la aplicación del ejercicio

3.7. Por ejemplo, para demostrar que A es equivalente a D, se sabe ya que "D implica A". Asimismo, por el ejercicio 3.7. ya que "A implica B", "B implica C" y "C implica D", se infiere que "A implica D".

3.10 *a*) ***Descripción de la demostración.*** El método progresivo-regresivo da lugar a la pregunta de abstracción "¿cómo puedo demostrar que un triángulo es isósceles?" Mediante la aplicación de la definición de triángulo isósceles tiene que demostrarse que dos de sus lados son iguales, lo cual en este caso particular significa que debe demostrarse que $u = v$. Utilizando el proceso progresivo a partir de la hipótesis se sabe que sen (U) $= \sqrt{u/2v}$. Por la definición de seno, sen $(U) = u/w$, de donde $\sqrt{u/2v} = u/w$, y efectuando algunas operaciones algebraicas se llega a que $w^2 = 2uv$. Además, por el teorema de Pitágoras, $u^2 + v^2 = w^2$. Al sustituir w^2 se obtiene $u^2 + v^2 = 2uv$ y, por consiguiente, $u^2 - 2uv + v^2 = 0$. Al factorizar y, a continuación, sacar la raíz cuadrada a ambos miembros de la ecuación, se infiere que $u - v = 0$, o que $u = v$, terminándose así la demostración.

Demostración. Puesto que sen $(U) = \sqrt{u/2v}$ y sen $(U) = u/w$, $\sqrt{u/2v} = u/w$, o bien $w^2 = 2\,uv$. Ahora, por el teorema de Pitágoras, $w^2 = u^2 + v^2$, y al substituir w^2 por $2uv$ y efectuar a continuación algunas operaciones algebraicas, se llega a que $u = v$. ||

b) ***Descripción de la demostración.*** Para verificar la hipótesis del ejemplo 1 para el triángulo particular UVW es necesario hacer corresponder la notación. Específicamente, $x = u$, $y = v$ y $z = w$. Después debe demostrarse que $uv/2 = w^2/4$. Utilizando el proceso progresivo a partir de la hipótesis de este problema de que sen $(U) = \sqrt{u/2v}$, y como sen $(U) = u/w$, se tiene que $\sqrt{u/2v} = u/w$, o $u/2v = u^2/w^2$, o $w^2 = 2uv$, y, por último, que $uv/2 = w^2/4$. Obsérvese asimismo que el triángulo UVW es rectángulo.

Demostración. Por la hipótesis, sen $(U) = \sqrt{u/2v}$, y por la definición de seno, sen $(U) = u/w$, de donde $\sqrt{u/2v} = u/w$. Al efectuar algunas operaciones algebraicas se llega a que $uv/2 =$

$w^2/4$. Por lo tanto, la hipótesis del ejemplo 1 es válida para el triángulo rectángulo particular *UVW* y, por consiguiente, el triángulo es isósceles. ||

c) ***Descripción de la demostración.*** Para verificar la hipótesis del ejemplo 3 para el triángulo particular *UVW* es necesario hacer corresponder la notación. Específicamente, $r = u$, $s = y$ y $t = w$. Después debe demostrarse que $w = \sqrt{2uv}$, pero como en la demostración del inciso *b*), $\sqrt{u/2v} = u/w$, de modo que $u/2v = u^2/w^2$, o $w^2 = 2uv$, o $w = \sqrt{2uv}$. Obsérvese asimismo que el triángulo *UVW* es rectángulo.

Demostración. Por la hipótesis, sen $(U) = \sqrt{u/2v}$, y por la definición de seno, sen $(U) = u/w$, de donde se obtiene que $\sqrt{u/2v} = u/w$. Efectuando algunas operaciones algebraicas se llega a que $w = \sqrt{2uv}$. Por tanto, la hipótesis del ejemplo 3 es válida para el triángulo rectángulo particular *UVW* y, por consiguiente, el triángulo debe ser isósceles. ||

CAPÍTULO 4

4.1

Objeto	*Cierta propiedad*	*Algo sucede*
a) montaña de los Himalayas	más de 20,000 pies	de mayor altitud que cualquier otra montaña del mundo
b) entero x	ninguna	$x^2 - 5x/2 + 3/2 = 0$
c) recta ℓ'	pasa por P que no está en ℓ	ℓ' es paralela a ℓ
d) ángulo t	$0 < t < \pi/2$	sen $(t) =$ cos (t)
e) números racionales r, s	entre x y y	$\lvert r - s \rvert < 0.001$

4.2 *a*) Un triángulo XYZ es isósceles si E dos lados ϵ sus longitudes sean iguales.

b) Dado un ángulo t, E un ángulo t' ϵ la tangente de t' es mayor que la tangente de t.

c) En una fiesta de n personas, E por lo menos dos personas ϵ tienen el mismo número de amigos.

d) Para un polinomio de grado n, por ejemplo, $P(x)$, E exactamente n raíces complejas, $r_1, \ldots, r_n$ ϵ $P(r_1) = \ldots = P(r_n) = 0$.

4.3 ***Descripción de la demostración.*** Utilizando el método por construcción se encontrarán los valores de x tales que $x^2 - 5x/2 + 3/2 = 0$. Por la fórmula para resolver una ecuación de segundo grado, los valores de x son:

$$(5/2 \pm \sqrt{25/4 - 12/2})/2 = (5/2 \pm 1/2)2,$$

o x es igual a 1 ó 3/2. Si se sustituyen ahora estos valores de x en $x^2 - 5x/2 + 3/2 = 0$, se ve que se satisface la ecuación de segundo grado.

a) ***Demostración.*** Aplicando la fórmula para resolver una ecuación de segundo grado en $x^2 - 5x/2 + 3/2 = 0$ se encuentra que $x = 1$ o $x = 3/2$. Por tanto, existe un entero, es decir, $x = 1$, tal que $x^2 - 5x/2 + 3/2 = 0$. El entero es único. ||

b) ***Demostración.*** Aplicando la fórmula para resolver una ecuación de segundo grado en $x^2 - 5x/2 + 3/2 = 0$ se encuentra que $x = 1$ o $x = 3/2$. Por tanto, existe un número real para x tal que $x^2 - 5x/2 + 3/2 = 0$. El número real x no es único. ||

4.4 ***Descripción de la demostración.*** El método progresivo-regresivo da lugar a la pregunta de abstracción "¿cómo puedo demostrar que un entero (es decir, a) divide a otro entero (es decir, c)?" Por la **definición 1**, una respuesta es demostrar que existe un entero k tal que $c = ak$. La presencia del cuantificador "existe" indica que es necesario aplicar el proceso progresivo para construir la k buscada.

A partir de la hipótesis de que $a|b$ y $b|c$, y por la **definición 1**, existen los enteros p y q tales que $b = ap$ y $c = bq$. Por lo tanto, se

infiere que $c = bq = (ap)q = a(pq)$, y el entero buscado k es $k = pq$.

Demostración. Puesto que $a|b$ y $b|c$, por definición, existen los enteros p y q para los que $b = ap$ y $c = bq$. Pero entonces $c = bq = (ap)q = a(pq)$. Por tanto, $a|c$. ||

4.5 ***Descripción de la demostración.*** El método progresivo-regresivo da lugar a la pregunta de abstracción "¿cómo puedo demostrar que un número real (es decir, s/t) es racional? Por la **definición 11**, una respuesta es demostrar que existen los enteros p y q con $q \neq 0$ tales que $s/t = p/q$. La presencia del cuantificador "existen" indica que es necesario aplicar el proceso progresivo para generar los números p y q buscados.

A partir de la hipótesis de que s y t son números racionales, y por la **definición 11**, existen los enteros a, b, c y d con $b \neq 0$ y tales que $s = a/b$ y $t = c/d$. Además, puesto que $t \neq 0$, $c \neq 0$ y, por consiguiente, $bc \neq 0$. Por lo tanto, $s/t = (a/b)/(c/d) = ad/bc$. De modo que los enteros p y q buscados son $p = ad$ y $q = bc$. Obsérvese que como $b \neq 0$ y $c \neq 0$, $q \neq 0$ y, además, $s/t = p/q$.

Demostración. Puesto que s y t son racionales, por definición, existen los enteros a, b, c y d con $b \neq 0$ y $d \neq 0$ tales que $s = a/b$, y $t = c/d$. Además, como $t \neq 0$, $c \neq 0$. Haciendo $p = ad$ y $q = bc$, y observando que $q \neq 0$, se tiene que $s/t = (a/b)/(c/d) = ad/bc = p/q$, de donde s/t es racional. ||

CAPÍTULO 5

5.1 *a*) Objeto: número real x.
Cierta propiedad: ninguna
Algo sucede: $f(x) \leqslant f(x^*)$.
b) Objeto: elemento x.
Cierta propiedad: x está en S.
Algo sucede: $g(x) \geqslant f(x)$.
c) Objeto: elemento x.
Cierta propiedad: x está en S.
Algo sucede: $x \leqslant u$.

d) Objeto: número real ϵ.
Cierta propiedad: $\epsilon > 0$.
Algo sucede: existe x en S tal que $x > u - \epsilon$.
e) Objeto: elementos x y y, y números reales t.
Cierta propiedad: x y y están en C, y $0 \leqslant t \leqslant 1$.
Algo sucede: $tx + (1 - t)$ y es elemento de C.
f) Objeto: números reales x, y y t.
Cierta propiedad: $0 \leqslant t \leqslant 1$.
Algo sucede:
$f(tx + (1 - t)y) \leqslant tf(x) + (1 - t)f(y)$
g) Objeto: número real ϵ.
Cierta propiedad: $\epsilon > 0$.
Algo sucede: existe un número real $\delta > 0$ tal que, para todo número real y que cumpla $|x - y| < \delta$, $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.
h) Objeto: número real ϵ.
Cierta propiedad: $\epsilon > 0$.
Algo sucede: existe un entero k' tal que para todos los enteros $k > k'$, $|x^k - x| < \epsilon$.

5.2 *a*) Sea x' un número real. Se demostrará que $f(x') \leqslant f(x^*)$.
b) Sea x' elemento de S. Se demostrará que $g(x') \geqslant f(x')$.
c) Sea x' elemento de S. Se demostrará que $x' \leqslant u$.
d) Sea ϵ' un número real tal que $\epsilon' > 0$. Se demostrará que existe x en S tal que $x > u - \epsilon$.
e) Sean x' y y' elementos de C, y sea t' un número real entre 0 y 1. Se demostrará que $t'x' + (1 - t')y'$ es elemento de C.
f) Sean x', y' y t' números reales tales que $0 \leqslant t' \leqslant 1$.
Se demostrará que $f(t'x' + (1 - t')y') \leqslant t'f(x') + (1 - t')f(y')$.
g) Sea ϵ' un número real tal que $\epsilon' > 0$. Se demostrará que existe un número real $\delta > 0$ tal que, para todo número real que cumpla $|x - y| < \delta$, $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.
h) Sea ϵ' un número real tal que $\epsilon' > 0$. Se demostrará que existe un entero k' tal que para todos los enteros $k > k'$, $|x^k - x| < \epsilon'$.

5.3 Cuando se utiliza el método por selección para demostrar que "para todos los objetos que poseen cierta propiedad, algo sucede", se eligiría un objeto particular que posee cierta propiedad específica. A continuación, se partiría (proceso progresivo)

de dicha propiedad específica para llegar a la conclusión de que sucede algo específico. Lo anterior es exactamente lo mismo que aplicar el método progresivo-regresivo para demostrar que "si x es un objeto con cierta propiedad, entonces algo específico sucede", con lo cual se estaría avanzando progresivamente a partir del hecho de que x es un objeto con cierta propiedad específica y, regresivamente, a partir de aquello que sucede. En otros términos, una proposición que contiene el cuantificador "para todo a" puede convertirse en una proposición equivalente de la forma "si . . . , entonces. . .".

5.4 *a*) E una montaña ϵ A otra montaña ésta tiene una altitud mayor que el resto.
b) A ángulo t, sen $(2t) = 2$ sen (t) cos (t).
c) A par de números reales no negativos p y q, $\sqrt{pq} \leqslant (p+q)/2$.
d) A par de números reales x y y con $x < y$, E un número racional $r \: \epsilon \: x < r < y$.

5.5 *a*) Se aplicaría primero el método por construcción para generar $M > 0$ y, a continuación, se aplicaría el método por selección para elegir x' en S para la que debe demostrase que $|x'| \leqslant M$.
b) Se aplicaría primero el método por selección y se elegiría $M' > 0$; a continuación, se aplicaría el método por construcción para generar una x en S para la que $|x| > M'$.
c) Se aplicaría primero el método por selección para elegir $\epsilon' > 0$ y, a continuación, se aplicaría el método por construcción para generar $\delta > 0$, para aplicar después nuevamente el método por selección a fin de elegir x' y y' con $|x' - y'| < \delta$, para las que debe demostrarse que $|f(x') - f(y')| < \epsilon'$.

5.6 ***Descripción de la demostración.*** El método progresivo-regresivo da lugar a la pregunta de abstracción "¿cómo puedo demostrar que un conjunto (es decir, T) es subconjunto de otro conjunto (es decir, S)? La definición proporciona la respuesta de que debe demostrarse que

$$B_1 : \text{para toda } t \text{ de } T, \ t \text{ está en } S.$$

La presencia del cuantificador "para toda" en el proceso regresivo indica el uso del método por selección para elegir un elemento

t' de T para el que debe demostrarse que

B_2 : t' está en S.

Esto se logra a su vez demostrando que t' satisface la propiedad que define a S, es decir, que

B_3 : $(t')^2 - 3t' + 2 \leq 0$.

Partiendo del hecho de que t' está en T, es decir, que satisface la propiedad que define a T, se sabe que

A_1 : $1 \leq t' \leq 2$.

Por consiguiente, $(t' - 1) \geq 0$ y $(t' - 2) \leq 0$, de donde $(t')^2 - 3t' + 2 = (t' - 1)(t' - 2)$ SO, con lo que se establece la proposición B_3 y se termina la demostración.

Demostración. A fin de demostrar que $T \subset S$, sea t' un elemento de T. Se demostrará que t' está en S. Puesto que t' está en T, $1 < t' \leq 2$, de donde $(t' - 1) \geq 0$ y $(t' - 2) \leq 0$. Por tanto,

$$(t')^2 - 3t' + 2 = (t' - 1)(t' - 2) \leq 0.$$

y, por consiguiente, t' está en S. ||

5.7 ***Descripción de la demostración.*** La palabra clave "para todo" de la conclusión indica el uso del método por selección. Para este fin, sea $x' > 2$ un número real. Para construir la $y < 0$ buscada, se requiere que

$$x' = 2y/(1 + y)$$

o

$$x' + x'y = 2y$$

o

$$x' = 2y - x'y = y(2 - x')$$

o

$$y = x'/(2 - x').$$

Por lo tanto, la y buscada es $x'/(2 - x')$, y es sencillo demostrar que, para este valor de y, $x' = 2y/(1 + y)$. Sin embargo, también debe demostrarse que $y < 0$, como es el caso, ya que $x' > 2$.

Demostración. Sea $x' > 2$ y, por consiguiente, puede generarse $y = x'/(2 - x')$. Puesto que $x' > 2$, $y < 0$ también, es sencillo verificar que $x' = 2y/(1 + y)$. ||

5.8 ***Descripción de la demostración.*** El método progresivo-regresivo da lugar a la pregunta de abstracción "¿cómo puedo demostrar que una función es convexa?" Utilizando la definición del ejercicio 5.1 *f*), debe demostrarse que

B_1 : Para todos los números reales x y y, y para toda t con $0 \leqslant t \leqslant 1$.
$f(tx + (1 - t)y) \leqslant tf(x) + (1 - t)f(y)$.

La presencia del cuantificador "para todo" indica el uso del método por selección. Por lo tanto, deben elegirse los números reales x' y y', y un número real t' que satisfaga $0 \leqslant t' \leqslant 1$. Debe demostrarse que

$$f(t'x' + (1 - t')y') \leqslant t'f(x') + (1 - t')f(y').$$

Pero por hipótesis,

$$\begin{aligned} f(t'x' + (1 - t')y') &= m(t'x' + (1 - t')y') + b \\ &= mt'x' + my' - mt'y' + b \\ &= mt'x' + bt' + my' - mt'y' + b - bt' \\ &= t'(mx' + b) + (1 - t')(my' + b) \\ &= t'f(x') + (1 - t')f(y'). \end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple la desigualdad pertinente.

Demostración. Para probar que f es convexa debe demostrarse que para todos los números reales x y y, y para toda t que satisface $0 \leqslant t \leqslant 1$,

$$f(tx + (1 - t)y) \leqslant tf(x) + (1 - t)f(y).$$

Sean x' y y' números reales, y sea t' que satisface $0 \leqslant t' \leqslant 1$; entonces

$$\begin{aligned} f(t'x' + (1 - t')y') &= m(t'x' + (1 - t')y') + b \\ &= mt'x' + my' - mt'y' + b \\ &= t'(mx' + b) + (1 - t')(my' + b) \\ &= t'f(x') + (1 - t')f(y'). \end{aligned}$$

Por tanto, se cumple la desigualdad. ||

CAPÍTULO 6

6.1 *a*) Aplicable .

b) No aplicable porque la proposición contiene el cuantificador "existe" en lugar de "para todo".

c) Aplicable.

d) Aplicable.

e) No aplicable porque, en esta proposición, n es un número real y la inducción sólo se aplica con enteros.

6.2 *a*) El método por selección se aplica cuando la proposición B presenta la forma siguiente: "para todo objeto con cierta propiedad, algo sucede". La inducción se aplica siempre que el objeto sea un entero y que la propiedad particular consista en ser mayor que un entero inicial. La inducción se utiliza en tales casos porque, con frecuencia, es más sencillo demostrar que algo específico sucede para $n + 1$, dado que sucede para n, que demostrar que sucede para n, dada cierta propiedad específica, según se procedería con el método por selección.

b) No es posible utilizar la inducción cuando el objeto no es un entero porque al demostrarse que $P(n)$ implica $P(n + 1)$ pueden "saltarse" varios valores del objeto. Como resultado, la proposición no se habrá probado para tales valores.

6.3 ***Demostración.*** Se demuestra primero que $P(n)$ es verdadera para $n = 1$. Sustituyendo n por 1 debe demostrarse que $1(1!) = (1 + 1)! - 1$. Pero esto es inmediato, ya que $1(1!) = 1 = (1 + 1)! - 1$.

Se supone ahora que $P(n)$ es verdadera y se utiliza este hecho para demostrar que $P(n + 1)$ es verdadera. Así,

$P(n) \quad : \quad 1(1!) + \ldots + n(n!) = (n+1)! - 1$
$P(n+1) \quad : \quad 1(1!) + \ldots + (n+1)(n+1)! = (n+2)! - 1$

Empezando con el primer miembro de $P(n + 1)$ y utilizando a continuación $P(n)$ se tiene

$$\begin{aligned} 1(1!) + \ldots + n(n!) + (n+1)(n+1)! &\\ &= [1(1!) + \ldots + n(n!)] + (n+1)(n+1)! \\ &= [(n+1)! - 1] + (n+1)(n+1)! \\ &= (n+1)!\,[1 + (n+1)] - 1 \\ &= (n+1)!\,(n+2) - 1 \\ &= (n+2)! - 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $P(n + 1)$ es verdadera, terminándose así la demostración.‖

6.4 ***Demostración.*** Se demuestra primero que $P(n)$ es verdadera para $n = 5$. Pero $2^5 = 32$ y $5^2 = 25$, de donde $2^5 > 5^2$. Por lo tanto, $P(n)$ es verdadera para $n = 5$. Suponiendo que $P(n)$ es verdadera se debe demostrar ahora que $P(n + 1)$ es verdadera. Así,

$P(n) \quad : \quad 2^n > n^2$
$P(n+1) \quad : \quad 2^{n+1} > (n+1)^2$

Empezando con el primer miembro de $P(n + 1)$ y utilizando el hecho de que $P(n)$ es verdadera se tiene:

$$2^{n+1} = 2(2^n) > 2(n^2)$$

Para obtener $P(n + 1)$ debe demostrarse que para $n > 5$, $2n^2 > (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$, o que, al restar n en ambos miembros, $n^2 > 2n + 1$. La última proposición es verdadera para $n = 5$ (pero no para $n = 1$ o $n = 2$), y por inducción puede demostrarse que se cumple para $n > 5$.‖

6.5 ***Demostración.*** La proposición es verdadera para un conjunto que conste de un solo elemento, por ejemplo x, porque sus subconjuntos son $\{x\}$ y $\emptyset$, es decir, hay $2^1 = 2$ subconjuntos. Supóngase que para un conjunto con n elementos, el número de subconjuntos es 2^n. Se demostrará que para un conjunto con $(n + 1)$

elementos el número de subconjuntos es 2^{n+1} Para un conjunto S con $(n + 1)$ elementos, los subconjuntos pueden formarse enlistando todos los subconjuntos que sea posible formar utilizando los n primeros elementos y, después, es posible agregar a cada uno de estos subconjuntos el último elemento de S. Por la hipótesis de inducción, hay 2^n subconjuntos cuando se emplean n elementos, y se forman 2^n subconjuntos adicionales al agregarse el último elementos de S a cada uno de los subconjuntos de n elementos. Por lo tanto, el número total de subconjuntos de S es $2^n + 2^n = 2^{n+1}$, con lo que se establece la proposición para $(n + 1)$.||

6.6 ***Demostración.*** Sea

$$S = 1 + \quad 2 \quad + \ldots + n$$

Entonces,

$$S = n + (n - 1) + \ldots + 1$$

y al sumar miembro a miembro las dos ecuaciones anteriores se obtiene

$$2S = n(n + 1)$$

es decir, $S = n(n + 1)/2$.||

6.7 ***Demostración.*** Al verificar la proposición para $n = 1$ se encuentra que $n^3 - n = 1 - 1 = 0$, y que seis divide a cero, ya que $0 = (6)(0)$. Suponiendo que la proposición sea verdadera para $(n-1)$, se sabe que 6 divide a $(n - 1)^3 - (n - 1)$, o $(n - 1)^3 - (n - 1) = 6k$ para un entero k. Debe demostrarse que $n^3 - n = 6m$ para un entero m. Para relacionar $P(n)$ con $P(n + 1)$ se tiene

$$(n - 1)^3 - (n - 1) = n^3 - 3n^2 + 3n - 1 - n + 1$$

$$= n^3 - 3n^2 + 2n$$

$$= n^3 - n - (3n^2 - 3n)$$

De modo que $n^3 - n = [(n-1)^3 - (n-1)] + 3n^2 - 3n$. Por la hipótesis de inducción, $[(n-1)^3 - (n-1)]$ es divisible entre 6, por lo que debe demostrarse que $3n^2 - 3n$ también es divisible entre 6 o de manera equivalente, que $n^2 - n$ es divisible entre 2. Sin embargo, ya que $n^2 - n = n(n-1)$ = al producto de dos enteros consecutivos, n o bien $(n-1)$ debe ser par y, por consiguiente, $n(n-1)$ es divisible entre 2. Se infiere por lo tanto que $3n^2 - 3n = 6p$ para un entero p. Así, el valor buscado del entero m es $k + p$, porque entonces

$$
\begin{aligned}
n^3 - n &= [(n-1)^3 - (n-1)] + 3(n^2 - n) \\
&= 6k + 6p \\
&= 6(k + p). \|
\end{aligned}
$$

6.8 *a*) Verificar que la proposición es verdadera para el valor inicial. Después, suponiendo que la proposición es verdadera para n, demostrar que es verdadera para $n - 1$.

b) Verificar que la proposición es verdadera para algún entero. Suponiendo que la proposición es verdadera para n, demostrar que es verdadera para $n + 1$ y que también es verdadera para $n - 1$.

c) Verificar que la proposición es verdadera para $n = 1$. Suponiendo que la proposición es verdadera para $2n + 1$, demostrar que también es verdadera para $2n + 3$.

6.9 El error se presenta en el último enunciado donde se establece que "entonces, ya que todos los caballos con color de este grupo (el segundo) son color marrón, el caballo sin color también debe ser marrón." ¿Cómo sabe usted que hay un caballo con color en el segundo grupo? De hecho, cuando el grupo original de $(n + 1)$ caballos consta exactamente de dos unidades, el segundo grupo de n caballos no contendrá ningún caballo de color. Toda la dificultad se origina por el hecho de que la proposición debería haberse verificado para el entero inicial $n = 2$, no $n = 1$. Esto, por supuesto, no es posible. ||

CAPÍTULO 7

7.1 El método por selección se emplea cuando el cuantificador "para todo(a)" está presente en el proceso regresivo. La particulari-

zación se emplea cuando el cuantificador "para todo(a)" está presente en el proceso progresivo. En otros términos, el método por selección se usa cuando quiere demostrarse que "para todos los objetos con cierta propiedad, algo sucede". La particularización se emplea cuando se sabe que "para todos los objetos con cierta propiedad, algo sucede".

7.2 *a*) m debe ser un entero mayor o igual que 5, y si lo es, entonces $2^n > m^2$.

b) y debe ser un elemento de S que cumple $|y| < 5$, y si lo es, entonces y es elemento del conjunto T.

c) ϵ' debe ser mayor que cero, y si lo es, entonces E $\delta > 0 \in$ A y que cumple $|x - y| < \delta$, $|f(x) - f(y)| < \epsilon'$.

d) El área del cuadrilátero $QRST$ debe ser igual al cuadrado de la longitud de una diagonal, y si lo es, entonces $QRST$ es un cuadrado.

e) El ángulo S del triángulo RST debe encontrarse estrictamente entre 0 y $\pi/4$, y si lo está, entonces cos(S) sen (S).

7.3 ***Descripción de la demostración.*** El método progresivo-regresivo da lugar la pregunta de abstracción "¿cómo puedo demostrar que un conjunto (es decir, R) es subconjunto de otro conjunto (es decir, T)?" Una respuesta es por la definición, de donde se demuestra que

B_1 : Para toda r de R, r está en T.

La presencia del cuantificador "para toda" en el proceso regresivo indica que debe usarse el método por selección. Por lo tanto, se elige una r' en R y, aplicando esta información en la hipótesis debe demostrarse que r' está en T.

Pasando al proceso progresivo, la hipótesis dice que R es subconjunto de S y que S es subconjunto de T, lo cual por definición significa, respectivamente, que

A_1 : para toda r de R, r está en S, y
A_2 : para toda s de S, s está en T.

Al particularizar A_1 para r' (que está en R), se tiene que r' está en S. Al particularizarse A_2 para r' (que está en S), se tiene que

r' está en T, que es la proposición B_1, terminándose de este modo la demostración.

Demostración. Para demostrar que R es subconjunto de T, debe probarse que para toda r de R, r está en T. Sea que r' esté en R. Por hipótesis, R es subconjunto de S, por lo que r' está en S. Asimismo, por hipótesis, S es subconjunto de T, por lo que r' está en I. ||

7.4 ***Descripción de la demostración.*** El método progresivo-regresivo da lugar a la pregunta de abstracción "¿cómo puedo demostrar que un conjunto (S intersección T) es convexo?" Una pregunta es por la definición, de donde debe demostrarse que

B_1: para toda x y y de S intersección T, y para toda $0 \leqslant t \leqslant 1$, $tx + (1 - t)y$ está en S intersección T.

La presencia del cuantificador "para toda" en el proceso regresivo indica el uso del método por selección para elegir x' y y' de S intersección T, y t' con $0 \leqslant t' \leqslant 1$, para las que debe demostrarse que

B_2: $t'x' + (1 - t')y'$ está en S intersección T.

Utilizando el proceso progresivo partiendo de la hipótesis y de la hipótesis y de la información anterior, se establecerá B_2 demostrando que $t'x' + (1 - t')y'$ está tanto en S como en T. Específicamente, a partir de la hipótesis de que S es convexo, y por la definición, se infiere que

A_1: para toda x y y de S, y para toda $0 \leqslant t \leqslant 1$, $tx + (1 - t)y$ está en S.

Al particularizar esta proposición para x', y' y t' se llega a que $t'x' + (1 - t')y'$ está en S. Con un razonamiento similar se demuestra que $t'x' + (1 - t')y'$ está también en T, terminándose así la demostración.

Demostración. Para ver que S intersección T es convexa, sea que x' y y' estén en S intersección T, y sea $0 \leqslant t' \leqslant 1$. Se establece-

rá que $t'x' + (1 - t')y'$ está en S intersección T. A partir de la hipótesis de que S es convexo, se infiere que $t'x' + (1 - t')y'$ está en S. De manera similar, $t'x' + (1 - t')y'$ está en T. Por lo tanto, se tiene que $t'x' + (1 - t')y'$ está en S intersección T y, por consiguiente, que S intersección T es convexa. ||

7.5 ***Descripción de la demostración.*** La presencia del cuantificador "para toda" en la conclusión indica que deberá de usarse el método por selección para elegir un número real $s' \geq 0$ para el que debe demostrarse que la función $s'f$ es convexa. Una pregunta de abstracción relacionada es "¿cómo puedo demostrar que una función (es decir, $s'f$) es convexa?" Utilizando la definición del ejercicio 5.1*f*), una respuesta es demostrar que

B_1: para todos los números reales x y y, para toda $0 \leq t \leq 1$,

$s'f(tx + (1 - t)y) \leq ts'f(x) + (1 - t)s'f(y)$.

La presencia del cuantificador "para todos" en el proceso regresivo indica el uso del método por selección para elegir los números reales x' y y', y $0 \leq t' \leq 1$, para los que debe demostrarse que

B_2: $s'f(t'x' + (1 - t')y') \leq t's'f(x') + (1 - t')s'f(y')$.

El resultado buscado se obtiene a partir de la hipótesis de que f es una función convexa. Por la definición del ejercicio 5.1*f*) se sabe que

A_1: para todos los números reales x y y, y para toda $0 \leq t \leq 1$, $f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$.

Al particularizar esta proposición para x', y' y t' (observando que $0 \leq t' \leq 1$) se obtiene

A_2: $f(t'x' + (1 - t')y') \leq t'f(x') + (1 - t')f(y')$.

La proposición B_2 a la que se quiere llegar puede obtenerse multiplicando ambos miembros de la desigualdad de A_2 por el número no negativo s', terminándose de este modo la demostración.

Demostración. Para demostrar que $s'f$ es convexa, sean x' y y' números reales, y sea $0 \leqslant t' \leqslant 1$. Se demostrará que $s'f(t'x' + (1 - t')y') \leqslant t's'f(x') + (1 - t')s'f(y')$.

Puesto que por hipótesis f es una función convexa, se infiere entonces por la definición que $f(t'x' + (1 - t')y') \leqslant t'f(x') + (1 - t')f(y')$. El resultado buscado se obtiene multiplicando ambos miembros de esta desigualdad por el número no negativo s'. ||

7.6 ***Descripción de la demostración.*** El método progresivo-regresivo da lugar la pregunta de abstracción "¿cómo puedo demostrar que un conjunto (es decir, C) es convexo?" Utilizando la definición del ejercicio 5.1e), una respuesta es demostrar que

B_1: para toda x y z del conjunto C, y para toda $0 \leqslant t \leqslant 1$, $tx + (1 - t)z$ está en C

La presencia del cuantificador "para toda" en el proceso regresivo indica el uso del método por selección para elegir x' y z' de C, y $0 \leqslant t' \leqslant 1$. Utilizando esta información y la hipótesis, debe demostrarse que

B_2: $t'x' + (1 - t')z'$ está en C

Esto se hace a su vez demostrando que el punto $t'x' + (1 - t')z'$ satisface la propiedad que define a C, es decir,

B_3: $f(t'x' + (1 - t')z') \leqslant y$

Pasando al proceso progresivo, por hipótesis f es una función convexa. De modo que por la definición del ejercicio 5.1f), debe cumplirse que

A_1: para toda x y z, y para toda $0 \leqslant t \leqslant 1, f(tx + (1 - t)z) \leqslant tf(x) + (1 - t)f(z)$.

Habiéndose identificado el cuantificador "para toda" en el proceso progesivo, se utilizará la particularización. Específicamente, A_1 puede particularizarse para x', y' y t' (observando que $0 \leqslant t' \leqslant 1$), de modo que

A_2: $f(t'x' + (1 - t')z') \leqslant t'f(x') + (1 - t')f(z')$

Por último, para obtener B_2' se utilizará el hecho de que x' y z' están en el conjunto C, es decir, satisfacen la propiedad que define a C, de donde $f(x') \leqslant y$ y $f(z') \leqslant y$. Así, por A_2,

$$\begin{aligned} f(t'x' + (1 - t')z') &\leqslant t'f(x') + (1 - t')f(z') \\ &\leqslant t'y + (1 - t')y \\ &= y, \end{aligned}$$

y, por consiguiente, B_2 es verdadera, terminándose así la demostración.

Demostración: A fin de demostrar que C es convexa, sean x' y y' elementos de C, y sea que t' satisfaga $0 \leqslant t' \leqslant 1$. Por tanto, $f(x') \leqslant y$ y $f(z') \leqslant y$. Por la hipótesis, f es una función convexa y por lo tanto

$$\begin{aligned} f(t'x' + (1 - t')z') &\leqslant t'f(x') + (1 - t')f(z') \\ &\leqslant t'y + (1 - t')y \\ &= y \end{aligned}$$

y, por consiguiente, $t'x' + (1 - t')z'$ está en C. ||

7.7 ***Descripción de la demostración.*** El método progresivo-regresivo da lugar la pregunta de abstracción "¿cómo puedo demostrar que un número (es decir, 1) es la mínima cota o límite superior de un conjunto (es decir, S)?" Utilizando la definición del ejercicio 5.1*d*), una respuesta es demostrar que

B_1 : 1 es cota superior de S y, para toda $\epsilon > 0$, existe una x en S tal que $x > 1 - \epsilon$.

Al demostrar que la primera parte de B_1 es verdadera se llega a la pregunta de abstracción "¿cómo puedo demostrar que un numero (es decir, 1) es cota superior de un conjunto (S)?" Es posible utilizar nuevamente la definición del ejercicio 5.1*c* para llegar a la respuesta de que debe demostrarse que

B_2 : para toda x de S, $x \leqslant 1$.

Habiéndose identificado el cuantificador "para toda" en el proceso regresivo, se utiliza el método por selección para elegir un elemento x de S para el que debe demostrarse que

$B_3 : x \leqslant 1.$

A fin de establecer B_3 se hace uso del hecho de que x está en S. Con este fin, es importante observar que el conjunto S puede escribirse como

$S = \{$ números reales x: existe un entero $n \geqslant 2$ con $x = 1 - 1/n \}$.

Puesto que x está en S, existe un entero $n \geqslant 2$ para el que $x = 1 - 1/n$, y como $n \geqslant 2, x = 1 - 1/n \leqslant 1$, de donde B_3 es verdadera.
Pasando de nuevo a B_1, debe demostrarse aún que

B_4: para toda $\epsilon > 0$, existe x en S tal que $x > 1 - \epsilon$. Se utiliza una vez más el método por selección para elegir una $\epsilon > 0$ para la que debe demostrarse que

B_5: existe x en S tal que $x > 1 - \epsilon$.

Pasando al proceso progresivo, la x de S buscada se generaría encontrando un entero $n \geqslant 2$ para el que $1 - 1/n > 1 - \epsilon$ porque entonces será posible construir $x = 1 - 1/n$. La n buscada es cualquier entero mayor que $1/\epsilon$, ya que entonces $1 - 1/n > 1 - \epsilon$, con lo que se termina la demostración.

Demostración. Para ver que 1 es cota superior de S, sea que x esté en S. Por tanto, existe un entero $x \geqslant 2$ tal que $x = 1 - 1/n$. Por tanto $x \leqslant 1$ y, por consiguiente, 1 es cota superior de S. Para terminar la demostración, sea $\epsilon > 0$. Se generará un elemento x de S para el que $x > 1 - \epsilon$. Específicamente, sea $n > 1/\epsilon$. Entonces $x = 1 - 1/n$ satisface $x > 1 - \epsilon$. ||

CAPÍTULO 8

8.1 *a*) Suponer que: ℓ, m y n son tres enteros consecutivos, y que 24 divide a $\ell^2 + m^2 + n^2 + 1$.

b) Suponer que: la matriz M no es singular, y que los renglones de M son linealmente dependientes.
c) Suponer que f y g son dos funciones tales que $g \geqslant f$, f no tiene cota superior y g tiene cota superior.

8.2 *a*) El número de primos no es finito.
b) El conjunto de los números reales no está acotado.
c) El entero positivo p no puede dividirse entre ningún entero positivo que no sea 1 o p.
d) Las rectas ℓ y ℓ' no se intersecan.
e) El número real x no es mayor o igual que 5.

8.3 ***Descripción de la demostración.*** Para utilizar el método por contradicción, se empieza con los siguientes supuestos:

A: n es un entero para el que n^2 es par.

NO B: n no es par, es decir, n es impar.

Se procede progresivamente a partir de los supuestos anteriores empleando la definición de entero impar para llegar a la contradicción de que n^2 es impar. Por tanto, existe un entero k tal que $n = 2k + 1$. Entonces

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \end{aligned}$$

que es de la forma $n^2 = 2p + 1$, donde $p = 2k^2 + 2k$. Por lo tanto, n^2 es impar y con esta contradicción se establece el resultado.

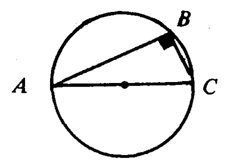
Demostración. Supóngase, por el contrario, que n es impar y que n^2 es par. Por tanto, existe un entero k tal que $n = 2k + 1$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1. \end{aligned}$$

y, por lo tanto, n^2 es impar, lo cual contradice el supuesto inicial. ||

8.4 ***Descripción de la demostración.*** Se procede suponiendo que existe una cuerda en un círculo cuya longitud es mayor que la del diámetro. Partiendo del supuesto anterior, y empleando las propiedades del círculo, deberá llegarse a una contradicción a fin de proporcionar una demostración válida.

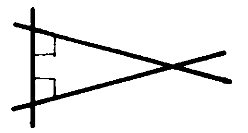
Sea AC la cuerda del círculo cuya longitud es mayor que la del diámetro. Sea AB un diámetro del círculo. Esta construcción es válida ya que, por definición, un diámetro es una recta que pasa por el centro y cuyos extremos están en la circunferencia.



A continuación se infiere que el ángulo ACB mide 90 grados (ya que es un ángulo en un semicírculo). Por lo tanto, el triángulo ABC es un triángulo rectángulo en el que AB es la hipotenusa. Entonces la contradicción buscada en que la hipotenusa de un triángulo rectángulo es de, longitud que la de uno de los catetos, lo cual es imposible.

Demostración. Supóngase que existe una cuerda, digamos AC, de un círculo, cuya longitud es mayor que la del diámetro. Se traza un diámetro de tal modo que uno de sus extremos coincida con uno de los extremos de la cuerda. Al unirse los extremos restantes se obtiene un triángulo rectángulo en el que el diámetro AB es la hipotenusa. Por tanto $\overline{AB} > \overline{AC}$, lo cual contradice el supuesto inicial. ||

8.5 ***Descripción de la demostración.*** Para usar el método por contradicción, se supone que las dos rectas ℓ_1 y ℓ_2, las cuales son perpendiculares a una tercera recta ℓ en el mismo plano, no son paralelas. Procediendo progresivamente puede concluirse que las dos rectas se intersecan en un punto del plano. Por consiguiente, las tres rectas ℓ_1, ℓ_2 y ℓ_3 formarán un triángulo.



La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180 grados. Puesto que dos de los ángulos miden 90 grados, el tercer ángulo del triángulo debe medir cero grados, lo cual es una contradicción evidente.

Demostración. Supóngase que ℓ_1 y ℓ_2 no son paralelas y que las dos son perpendiculares a la misma recta ℓ. Por tanto, ℓ_1 y ℓ_2 deben intersecarse y formar un triángulo en el que dos de los ángulos miden 90 grados. Puesto que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180 grados, se llega a la conclusión obligada de que el tercer ángulo mide cero grados, lo cual es una contradicción. ||

8.6 ***Descripción de la demostración.*** Para usar el método por contradicción, debe procederse suponiendo que ningún par de personas tiene el mismo número de amigos, es decir, que todos tienen un número diferente de amigos. Puesto que hay n personas, cada una de las cuales tiene un número diferente de amigos, es posible enlistar el número de amigos de cada persona de conformidad con una sucesión creciente. En otras palabras,

la persona número	1	no tiene	amigos
la persona número	2	tiene 1	amigo
la persona número	3	tiene 2	amigos
la persona número	n	tiene $n-1$	amigos

Al proceder de este modo se llega a una contradicción por cuanto la última persona será amiga de todas las demás personas ($n - 1$), incluyendo a la primera, la cual no tiene amigos.

Demostración. Supóngase, por él contrario, que ningún par de personas tiene el mismo número de amigos. Las personas de la fiesta pueden numerarse de tal manera que

la persona 1 tiene 0 amigos
la persona 2 tiene 1 amigo

. . .

la persona n tiene $n-1$ amigos.

Se infiere por consiguiente que la persona con $(n - 1)$ amigos es amiga de la persona que no tiene amigos, lo cual es una contradicción. ||

8.7 ***Descripción de la demostración.*** Por el método por contradicción, puede suponerse que no existen tres números consecutivos $(n - 1)$, n y $(n + 1)$ tales que el cubo del mayor sea igual a la suma de los cubos de los dos restantes. Ahora bien, es posible llegar a una contradicción demostrando que ningún entero satisface esta ecuación. Específicamente, se tiene que

$$(n - 1)^3 + n^3 = (n + 1)^3$$

o

$$n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

o

$$n^3 - 6n^2 - 2 = 0$$

o

$$n^2 (n - 6) = 2$$

Ahora bien, para $n \leqslant 6$, $n^2 (n - 6) \leqslant 0$, en tanto que para $n > 6$, $n^2 (n - 6) > 2$. Por lo tanto, no existe ningún entero n para el que $n^2 (n - 6) = 2$.

Demostración. Supóngase que $(n - 1)$, n y $(n + 1)$ son tres enteros consecutivos tales que

$$(n - 1)^3 + n^3 = (n + 1)^3.$$

Entonces,

$$n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

o

$$n^3 - 6n^2 = 2$$

o

$$n^2(n - 6) = 2.$$

Para $n \leqslant 6$, $n^2(n - 6) \leqslant 0$, en tanto que para $n > 6$, $n^2(n - 6) > 2$. Por lo tanto, no existe ningún entero n para el que $n^2(n - 6) = 2$. ||

8.8 ***Descripción de la demostración.*** Por el método de contradicción, puede suponerse que el número de primos es finito. Si es así, entonces habrá un número primo que sea mayor que el resto de los números primos. Sea n dicho número. Considérese el número $n! + 1$, y sea p un número primo cualquiera que divide a $n! + 1$. Se llegará a una contradicción demostrando que $p \leqslant n$ y $p > n$.

Puesto que n es el mayor de los números primos, $p \leqslant n$. Se usa el hecho de que p divide a $n! + 1$ para demostrar que $p \neq 1$, $p \neq 2, \ldots, p \neq n$, y, por consiguiente, debe ocurrir que $p > n$. Cuando $n! + 1$ se divide entre 2 hay un residuo de 1 ya que,

$$n! + 1 = [n(n - 1) \ldots (2)(1)] + 1$$

Asimismo, cuando $n! + 1$ se divide entre r, donde $1 < r < n$, hay un residuo de 1. De hecho, se tiene que

$$(n! + 1)/r = n!/r + 1/r$$

Por lo tanto $n! + 1$ no tiene factores primos entre 1 y n. Pero por el supuesto inicial, $n! + 1$ tiene un factor primo.
Por lo tanto, el factor primo es mayor que n, lo cual contradice el supuesto de que n es el mayor de los números primos.

Demostración. Supóngase, por el contrario, que hay un número finito de primos. Sea n el mayor de los números primos. Entonces $n! + 1$ no es número primo ya que $n! + 1 > n$. por lo tanto, $n! + 1$ tiene un factor primo p menor o igual que n. Pero $n! + 1$ no puede dividirse entre ningún número entre 1 y n. Por lo tanto $p > n$ y se llega por consiguiente a una contradicción. ||

8.9 *a*) Debe usarse el método por construcción.
Se genera un elemento s en S y se demuestra que s está en T.
b) Los métodos por selección y contradicción, en este orden.
Se elige s' en S y se concluye que no hay ninguna t en T tal que $s' > t$. Para llegar a la conclusión se usa el método por contradicción suponiendo que existe una t en T tal que $s' > t$. A continuación se llega a una contradicción.
c) Debe usarse el método por contradicción.

Se supone que existe una $M > 0$ tal que, para toda x de S, $|x| < M$, y se intenta llegar a una contradicción.

CAPÍTULO 9

9.1 *a*) Se parte de que: n es un entero impar.
Se intenta concluir que: n^2 es un entero impar.
b) Se parte de que: S es subconjunto de T y de que T está acotado.
Se intenta concluir que: S está acotado.
c) Se parte de que $f(x) = f(y)$.
Se intenta concluir que: $x = y$.
d) Se parte de que: los renglones de la matriz M son linealmente dependientes.
Se intenta concluir que: M es singular.

9.2 La proporción *b*) es resultado del proceso progresivo porque es posible suponer que existe un número real t entre 0 y $\pi/4$ tal que sen $(t) = r$ cos (t). Cuando se elevan al cuadrado ambos miembros, se obtiene el resultado del inciso *b*).

9.3 Para aplicar el método contrapositivo es necesario proceder progresivamente a partir de *NO B* y regresivamente a partir de *NO A*.

a) Incorrecta, el proceso de abstracción no debe aplicarse a *NO B*. Además, esta pregunta de abstracción contiene la notación específica del problema.

b) Incorrecta, porque la pregunta abstracta contiene la notación específica del problema.
c) Incorrecta, porque el proceso de abstracción no debe aplicarse a *NO B*.
d) Correcta.

9.4 ***Descripción de la demostración.*** Con el método contrapositivo es posible suponer la existencia de un entero impar, digamos m, que es solución de la ecuación $n^2 + n - c = 0$. Debe demostrarse que c no es impar, es decir, que c es par. Pero a partir de la ecuación puede escribirse que $c = m + m^2$. Para ver que c es par, obsérvese que m es impar y que, por consiguiente, m^2 también lo es (ver el ejercicio 3.5). Por tanto, $c = m + m^2$ = impar + impar = par, y así se termina la demostración.

Demostración. Supóngase la existencia de un entero impar, digamos m, que es solución de la ecuación $n^2 + n - c = 0$. Se demostrará que c no es impar. Pero $c = m + m^2$, y como m es impar, $m + m^2$ es par, y por consiguiente c es par. ||

9.5 ***Descripción de la demostración.*** La presencia del cuantificador "para toda" en la conclusión indica el uso del método por selección, según el cual se eligen los números reales x y y con $x \neq y$, para los que debe demostrarse que

$B_1 : f(x) \neq f(y)$.

La palabra "no" en B_1 indica que debe procederse con el método por contradicción o el contrapositivo. Aquí se usará el método contrapositivo, de conformidad con el cual puede suponerse que $f(x) = f(y)$. Ahora debe demostrarse que $x = y$. Para llegar a la conclusión buscada, se parte del hecho de que $f(x) = f(y)$. Específicamente, $mx + b = my + b$, y al restar el segundo miembro a ambos miembros de la ecuación se obtiene $m(x - y) = 0$. Haciendo uso de la hipótesis de que $m \neq 0$, se infiere que $x - y = 0$, de donde $x = y$.

Demostración. Supóngase que x y y son números reales para los que $f(x) = f(y)$. Se demostrará que $x = y$. Pero como $f(x) = f(y)$, se infiere entonces que $mx + b = my + b$, o $m(x - y) = 0$. Por la hipótesis de que $m \neq 0$ se llega a la conclusión buscada de que $x = y$. ||

9.6 ***Descripción de la demostración.*** Al aplicarse el método contrapositivo puede suponerse que el cuadrilátero $RSTU$ no es un rectángulo. Debe demostrarse que hay un ángulo obtuso. La presencia del cuantificador "hay" indica que es necesario recurrir al proceso progresivo para generar el ángulo obtuso buscado.

Al procederse progresivamente es posible concluir que por lo menos uno de los ángulos del cuadrilátero es diferente de 90 grados; por ejemplo, que es el ángulo R. Si el ángulo R mide más de 90 grados, entonces, es el ángulo buscado. De no ser así, el ángulo R mide menos de 90 grados. Esto significa a su vez que los ángulos restantes del cuadrilátero deben sumar más de 270 grados (porque la suma de los ángulos anteriores de $RSTU$ es 360 grados). Entre estos tres ángulos cuya suma es mayor que 270 grados, uno de ellos deben ser mayor que 90 grados, y es justamente el ángulo obtuso buscado.

Demostración, Supóngase que el cuadrilátero $RSTU$ no es un rectángulo y, por consiguiente, uno de sus ángulos, digamos R, es diferente de 90 grados. Se encontrará un ángulo obtuso. Si el ángulo R mide más de 90 grados entonces el ángulo buscado. De no ser así, la suma de los tres ángulos restantes es mayor de 270 grados. Por lo tanto, uno de los tres ángulos restantes es obtuso. ||

CAPÍTULO 10

10.1 *a*) El número x^* no es un máximo de la función f si existe un número real x tal que $f(x) > f(x^*)$.

b) Supóngase que f y g son funciones de una variable. Entonces g no es mayor o igual que f en el conjunto de números reales S si existe un elemento x en S tal que $g(x) > f(x)$.

c) El número real u no es cota superior de un conjunto de números reales S si existe x en S tal que $x > u$.

d) El número real u no es la mínima cota superior de un conjunto de números reales S si u no es cota superior de S o si existe un número real $\epsilon > 0$ tal que para toda x de S, $x \leqslant u - \epsilon$.

e) El conjunto de números reales C no es convexo si existen los elementos x y y en C y existe un número real entre cero y uno tal que $tx + (1-t)y$ no es elemento de C.

f) La función f de una variable no es convexa si existen los números reales x, y y t, con $0 \leqslant t \leqslant 1$, tales que $f(tx + (1-t)y) > tf(x) + (1-t)f(y)$.

g) La función f de una variable no es continua en el punto x si existe un número real $\epsilon > 0$ tal que para todo número real $\delta > 0$ existe y con $|x - y| < \delta$ tal que $|f(x) - f(y)| \geqslant \epsilon$.

h) Supóngase que $x, x^1, x^2, \ldots$ son números reales. La sucesión $x^1, x^2, \ldots$ no converge a x si E un número real $\epsilon > 0 \in$ A enteros k' E un entero $k > k'$ tal que $|x^k - x| \geqslant \epsilon$.

10.2 *a*) No existe un elemento x en el conjunto S tal que x no está en T.

b) No es verdadero que para todo ángulo t entre 0 y $\pi/2$, sen $(t) \neq$ cos (t).

c) No existe un "objeto" con "cierta propiedad específica" tal que no sucede "algo específico".

d) No es verdadero que para todo "objeto" con "cierta propiedad específica" no sucede "algo específico".

10.3 *a*) Suponer que existe un entero $n \geqslant 4$ tal que $n! \leqslant n^2$.

b) Suponer *A*, *NO B* y *NO C*.

c) Suponer *A*, *NO B* o *NO C*.

d) Suponer que f es una función convexa de una variable, x^* es un número real y existe un número real $\delta > 0$ tal que para todo número real x con la propiedad de que $|x - x^*| < \delta$, $f(x) \geqslant f(x^*)$. Por último, suponer que existe un número real y tal que $f(y) < f(*)$.

10.4 *a*) Progresivamente a partir de: (*NO B*) y (*NO C*)
Regresivamente a partir de: *NO A*

b) Progresivamente a partir de: (*NO B*) o (*NO C*)
Regresivamente a partir de: *NO A*

c) Progresivamente a partir de: mn no es divisible entre 4 y n es divisible entre 4.
Regresivamente a partir de: n es un entero impar o m es un entero par.

10.5 ***Descripción de la demostración.*** Cuando se aplica el método por contradicción puede suponerse que $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y = 0$ y que $x \neq 0$, o bien, $y \neq 0$. Entonces, supóngase primero que $x \neq 0$, de donde, ya que $x \geqslant 0$, debe cumplirse que $x > 0$. Al demostrarse que $y < 0$ se llegará a una contradicción ante

el hecho de que $y \geqslant 0$. Específicamente, de $x + y = 0$ se infiere que $y = -x$ pero $-x < 0$ y, por consiguiente, se ha llegado a la contradicción. Es posible utilizar un razonamiento similar para el caso en que $y \neq 0$.

Demostración. Supóngase que $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y = 0$ y que $x \neq 0$, o bien, $y \neq 0$. Si $x \neq 0$, entonces $x > 0$ y $y = -x < 0$, pero esto contradice el hecho de que $y \geqslant 0$. Asimismo, si $y \neq 0$, entonces $y > 0$ y $x = -y$, pero esto contradice el hecho de que $x \geqslant 0$. ‖

CAPÍTULO 11

11.1 ***Descripción de la demostración.*** Se utilizará el primer método de unicidad, en el que debe generarse primero el número real y. Sin embargo, esto ya se hizo en el ejercicio 5.7. Por lo tanto, tan sólo falta demostrar la unicidad suponiendo que y y z son números reales con $y < 0$, $z < 0$, $x = 2y/(1 + y)$ y $x = 2z/(1 + z)$. Al procederse progresivamente mediante operaciones algebraicas se demostrará que $y = z$. Específicamente,

$$x = 2y/(1 + y) = 2z/(1 + z)$$

o, de manera equivalente,

$$y + yz = z + yz$$

y, al restar yz de ambos miembros, se obtiene la conclusión buscada de que $y = z$.

Demostración. La existencia del número real y se estableció en el ejercicio 5.7. Para demostrar que y es única, supóngase que y y z satisfacen $y < 0$, $z < 0$, $x = 2y/(1 + y)$ y $x = 2z/(1 + z)$. De lo anterior, se infiere que $2y/(1 + y) = 2z/(1 + z)$, de donde $y + yz = z + yz$, o $y = z$, como quería demostrarse. ‖

11.2 ***Descripción de la demostración.*** De conformidad con el segundo método de unicidad, primero debe construirse un número real x para el que $mx + b = 0$. Pero como en la hipótesis se estable-

ce que $m \neq 0$, la x buscada es $-b/m$, porque entonces se infiere que $mx + b = m(-b/m) + b = -b + b = 0$.

Para establecer la unicidad, supóngase que x y y satisfacen $mx + b = 0$ y $my + b = 0$, así como que $x \neq y$. Se llega a una contradicción al demostrar que $m = 0$. Específicamente, como $mx + b = 0 = my + b$, se infiere que $m(x - y) = 0$. Al dividir entre el número diferente de cero $(x - y)$ se llega a que $m = 0$.

Demostración. A fin de construir el número x para el que $mx + b = 0$, sea $x = -b/m$ (con $m \neq 0$). Entonces $mx + b = m(-b/m) + b = 0$.

Supóngase ahora que $y \neq x$ y que se satisface $my + b = 0$. Entonces, $mx + b = my + b$, de donde $m(x - y) = 0$. Pero como $x - y \neq 0$, debe ocurrir que $m = 0$, lo cual contradice la hipótesis de que $m \neq 0$. ||

11.3 ***Descripción de la demostración.*** Primero debe abordarse la cuestión de la existencia. Para generar el número complejo buscado $(c + di)$ que satisfaga $(a + bi)(c + di) = 1$, sea $c = a/(a^2 + b^2)$ y $d = -b/(a^2 + b^2)$ (observando que el denominador es diferente de 0 ya que, por hipótesis, por lo menos uno de los dos números a y b es diferente de 0). Pero entonces,

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= ac - bd + (bc + ad)i \\ &= (a^2 + b^2)/(a^2 + b^2) + 0i \\ &= 1.\end{aligned}$$

Para ver que se cumple la unicidad, supóngase que $e + fi$ es otro número complejo que también satisface $(a + bi)(e + fi) = 1$. Se demostrará que $c + di$ es igual a $e + fi$. Al proceder progresivamente y multiplicando ambos miembros de la ecuación anterior por $e + fi$ se obtiene:

$$(e + fi)[(a + bi)(c + di)] = (e + fi)(1)$$

o

$$[(e + fi)(a + bi)](c + di) = e + fi$$

y como $(e + fi)(a + bi) = 1$, se infiere que $c + di = e + fi$.

Demostración. Puesto que $a \neq 0$, o bien, $b \neq 0$, se infiere que $a^2 + b^2 \neq 0$ y, por consiguiente, es posible generar el número complejo $c + di$ en el que $c = a/(a^2 + b^2)$ y $d = -b/(a^2 + b^2)$, porque entonces

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= ac - bd + (bc + ad)i \\ &= 1\end{aligned}$$

Para ver que se cumple la unicidad, supóngase que $e + fi$ también satisface $(a + bi)(e + fi) = 1$. De las reglas para multiplicar números complejos se infiere que

$$(e + fi)[(a + bi)(c + di)] = (e + fi)(1)$$

de modo que $c + di = e + fi$ y se encuentra establecida la unicidad. ||

11.4 ***Ventajas:*** se tienen tres proposiciones de partida para aplicar el proceso progresivo, a saber, A, *NO B* y *NO C*. Con el método de la disyunción exclusiva (o esclusiva) sólo se contaría con dos proposiciones de partida para dicho proceso.

Desventajas: no es posible proceder progresivamente porque no se sabe cuál será la contradicción. En el método de la disyunción exclusiva puede procederse regresivamente a partir de la proporción (B o C).

11.5 ***Descripción de la demostración***. Al aplicar el método de la disyunción exclusiva puede suponerse que n es un entero par y que m es un entero impar, así como que 4 divide a n. Debe concluir que 4 divide a mn.

Al aplicar el proceso regresivo se llega a la pregunta de abstracción "¿cómo puedo demostrar que un entero (es decir 4) divide a otro entero (es decir, mn)?" Utilizando la definición se llega a la respuesta de que debe demostrarse que existe un entero k tal que $mn = 4k$.

Pasando al proceso progresivo, debe generarse el valor de k. Puesto que m es impar, existe un entero j tal que $m = 2j + 1$. Puesto que 4 divide a n, existe un entero p tal que $n = 4p$. Por lo tanto,

$$mn = (2j + 1)(4p) = 4(2\,jp + p)$$

y la k buscada es $k = 2\,jp + p$.

Demostración. Supóngase que n es par, m es impar y que 4 divide a n. Se demostrará que 4 divide a mn o, de manera equivalente, que existe un entero k tal que $mn = 4k$. Pero como m es impar, existe un entero j tal que $m = 2j + 1$. Puesto que 4 divide a n, existe un entero p tal que $n = 4p$. Por lo tanto,

$$mn = (2j + 1)(4p) = 4(2jp + p).$$

Por lo tanto, el entero buscado es $k = 2\,jp + p$, terminándose de este modo la demostración. ||

Nota: Esta demostración también podría haberse realizado suponiendo que n es un entero par, que m es un entero impar y que 4 no divide a mn, para concluir a continuación que 4 no divide a n.

11.6 *a*) Si x es un número real que satisface $x^3 + 3x^2 - 9x - 27 \geqslant 0$, entonces $x \leqslant -3$ o $x \geqslant 3$.

b) ***Explicación detallada.*** De conformidad con el método de la disyunción exclusiva, puede suponerse que $x^3 + 3x^2 - 9 - 27 \geqslant 0$ y que $x > -3$. Debe demostrarse que $x \geqslant 3$. Se tiene ahora que

$$x^3 + 3x^2 - 9x - 27 = (x - 3)(x + 3)^2 \geqslant 0$$

Puesto que $x > -3$, $(x + 3)^2$ es positivo y, por consiguiente, debe tenerse que $x - 3 \geqslant 0$, o $x \geqslant 3$.

Demostración. Supóngase que $x^3 + 3x^2 - 9x - 27 \geqslant 0$ y que $x > -3$. Se infiere entonces que

$$x^3 + 3x^2 - 9x - 27 = (x - 3)(x + 3)^2 \geqslant 0$$

Puesto que $x > -3$, $(x + 3)^2$ es positivo, de donde $x - 3 \geqslant 0$ o, de manera equivalente, $x \geqslant 3$. ||

c) La demostración es similar a la del inciso *b*) salvo porque se supone que $x < 3$.

11.7 *a*) Para toda s en S, $s \leqslant x$.
b) Existe una s en S tal que $s \geqslant x$.
c) Existe x con $ax \leqslant b$ y $x \geqslant 0$ tal que $cx \leqslant u$.
d) Existe x con $ax \geqslant b$ y $x \geqslant 0$ tal que $cx \geqslant u$.
e) Para toda x con $b \leqslant x \leqslant c$, $ax \geqslant u$.
f) Para toda x con $a \leqslant x \leqslant c$, $bx \leqslant u$.

11.8 ***Descripción detallada de la demostración.*** Puede aplicarse el método máx/mín para convertir la conclusión en una proposición con cuantificador equivalente:

B: para toda s de S, $s \geqslant t^*$.

La presencia del cuantificador "para toda" en el proceso regresivo indica el uso del método por selección para elegir una s' en S para la que debe demostrarse que

$B_1 : s' \geqslant t^*$.

Puede llegarse a la conclusión buscada procediendo progresivamente y utilizando la particularización. Específicamente, puesto que S es subconjunto de T, se infiere que

A_1 : para toda s de S, s está en T.

Al particularizar A_1 para $s = s'$ (que está en S), se infiere que s' está en T. Además, en la hipótesis se establece que

A_2: para toda t de T, $t \geqslant t^*$.

Al aplicar la particularización a A_2 con $t = s'$ (que está en T), se infiere que $s' \geqslant t^*$, con lo que se termina la demostración.

Demostración. Para llegar a la conclusión, sea que s' esté en S. Se demostrará que $s' \geqslant t^*$. Por la hipótesis de que S es subconjunto de T, se infiere que s' está en T. Pero, entonces la hipótesis asegura que $s' \geqslant t^*$. ||

11.9 ***Explicación detallada de la demostración.*** Es posible aplicar el método máx/mín para convertir la conclusión en una proposición con cuantificador equivalente:

B_1 : para toda $x \geqslant 0$ con $ax \geqslant b$, y para toda $u \geqslant 0$ con con $ua \leqslant c$, $cx \geqslant ub$.

La presencia del cuantificador "para toda" en el proceso regresivo indica que debe elegirse una $x' \geqslant 0$ con $ax' \geqslant b$, así como $u' \geqslant 0$ con $u'a \leqslant c$, para las que debe demostrarse que $cx' \geqslant u'b$. Para ello se demostrará que $cx' \geqslant u'ax'$ y que $u'ax' \geqslant u'b$. Específicamente, al multiplicar ambos miembros de la desigualdad $u'a \leqslant c$ por el número no negativo x', se infiere que $cx' \geqslant u'ax'$. De igual manera, al multiplicar la desigualdad $ax' \geqslant b$ por el número no negativo u', se infiere que $u'ax' \geqslant u'b$, con lo que se termina la demostración.

Demostración. Para llegar a la conclusión buscada, sea $x' \geqslant 0$ con $ax' \geqslant b$, y sea $u' \geqslant 0$ con $u'a \leqslant c$. Se infiere entonces que $u'ax' \geqslant u'b$ y que $cx' \geqslant u'ax'$, de donde se tiene que $cx' \geqslant u'ax' \geqslant u'b$ y, por consiguiente, se ha terminado la demostración. ||

CAPÍTULO 12

12.1 *a*) El método contrapositivo o por contradicción, ya que en la conclusión se encuentra presente la palabra "no".

b) El método de inducción, ya que la proposición *B* es verdadera para cualquier entero $n \geqslant 4$.

c) El método progresivo-regresivo, ya que *B* no presenta ninguna forma evidente.

d) El método máx/mín, ya que en *B* aparece la palabra "máximo".

e) El método de unicidad, ya que se supone la presencia de una y sólo una recta.

f) El método por contradicción o el contrapositivo, ya que en la conclusión se encuentra presente la palabra "no".

g) El método progresivo-regresivo, ya que *B* no presenta ninguna forma evidente.

h) El método por selección, ya que el primer cuantificador de *B* es "para todo".

i) El método por construcción, ya que el primer cuantificador de *B* es "existe".

12.2 *a*) Al utilizar el método de inducción se supondría que $n! > n^2$ y que $n \geqslant 4$, y se intentaría demostrar que $(n + 1)! > (n + 1)^2$. También, tendría que demostrarse, por supuesto, que $4! > 4^2$.

b) Al utilizar el método por selección se eligiría un entero n' para el que $n' \geqslant 4$. Intentaría demostrarse que $(n')! > (n')^2$.

c) Al convertir la proposición a la forma "si. . . ,entonces. . ." se obtiene "si n es un entero mayor o igual que 4 entonces $n! > n^2$". Por lo tanto, se supondría que n es un entero mayor o igual que 4 y se intentaría demostrar que $n! > n^2$.

d) Al utilizar el método por contradicción se supondría que existe un entero $n \geqslant 4$ tal que $n! \leqslant n^2$, y se intentaría llegar a una contradicción.

Glosario de símbolos matemáticos

Símbolo	*Significado*	*Página*
= >	implica	20
< = >	si y sólo si	39
ϵ	es un elemento de	53
$\subseteq$	subconjunto	55
ϕ	conjunto vacío	55
$\sim$	no	43
A	para todo (para cada)	56
E	existe (existen)	49
$\in$	tal que	49
<	y	38
>	o	38
Q.E.D.	*quod erat demonstrandum* (Como se quería demostrar)	29

Índice

ESTA OBRA SE TERMINÓ DE IMPRIMIR EL DÍA
24 DE JUNIO DE 1993, EN LOS TALLERES DE
PROGRAMAS EDUCATIVOS, S.A. DE C.V.
CHABACANO NÚM. 65, LOCAL "A"
MÉXICO, D. F.

LA EDICIÓN CONSTA DE 500 EJEMPLARES
Y SOBRANTES PARA REPOSICIÓN

518